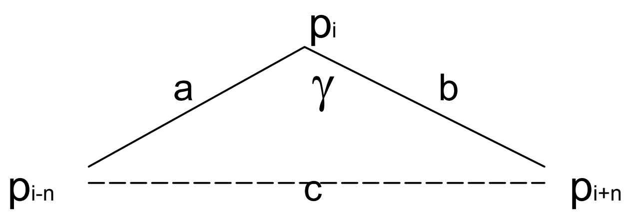
Bildanalyse und Bildverstehen

Lösung zu Aufgabe 17 (Konturkrümmung)

(a)

(1)



Kosinussatz : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

darin ist

$a^2 = (x_i - x_{i-n})^2 + (y_i - y_{i-n})^2$

$b^2 = (x_i - x_{i+n})^2 + (y_i - y_{i+n})^2$

$c^2 = (x_{i+n} - x_{i-n})^2 + (y_{i+n} - y_{i-n})^2$

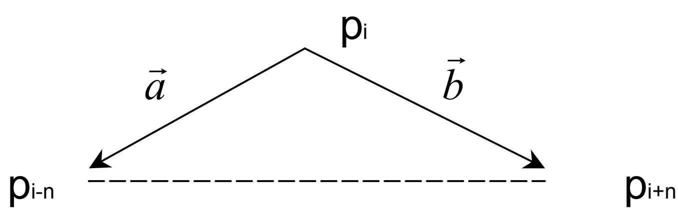
Beachte :

Verhalten dieses Krümmungsmaßes :

γ klein => Krümmung groß

wähle deshalb $180° - \gamma$ bzw. $\pi - \gamma$

(2)



Parallelogrammfläche $A_{par} = \left|\det(\vec{a}, \vec{b})\right|$

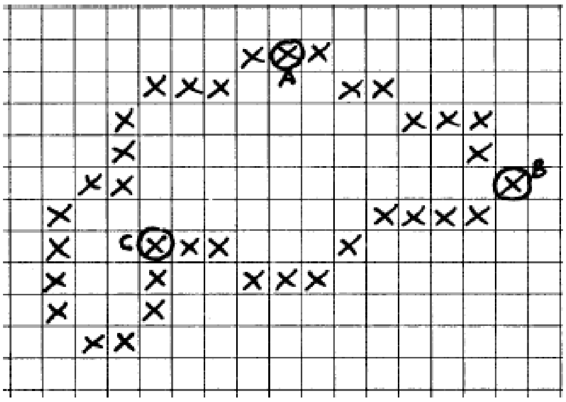
⇨ Dreiecksfläche $A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{a}, \vec{b})\right|$;

mit Vorzeichen :

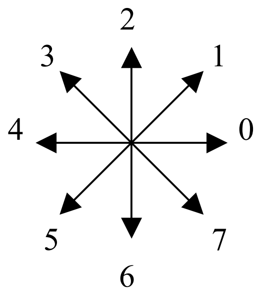
$$D_\Delta = \tfrac{1}{2}\det(\vec{a}, \vec{b}) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{i-n} - x_i & x_{i+n} - x_i \\ y_{i-n} - y_i & y_{i+n} - y_i \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big((x_{i-n}-x_i)(y_{i+n}-y_i)-(x_{i+n}-x_i)(y_{i-n}-y_i)\Big)$$

(b)



Kettenkode- Richtungen (für (3)):



(1) Punkt A : Winkel :

$a^2 = 4+1 = 5$, $b^2 = 5$, $c^2 = 16$

$$\gamma_i = \arccos \frac{5+5-16}{2\sqrt{5} \bullet \sqrt{5}} = \arccos\frac{-6}{10} = \arccos(-\frac{3}{5})$$

$$= \arccos -0.6 \approx 126.87^\circ$$

$[180° - \gamma_i \approx 53.13^\circ]$

Punkt B : Winkel 90° [90°]

Punkt C : Formel liefert 90°

Korrekt wäre 270°[bzw. 180° - 270° = -90°]

Stelle wird nicht als konkav erkannt! (Nachteil)

(2) vorzeichenbehaftete Fläche :

A: $D_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2+2) = 2$

B: $D_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1+4) = \frac{5}{2}$

C: $D_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow konkav$

Aber : C hat bis aufs Vorzeichen gleichen Wert wie A => irreführendes Ergebnis

(3) gewichtete Richtungsdifferenzen :

A: d_{i-1} = (0 – 1 + 12 mod 8) – 4 = 3 – 4 = –1

d_i = (0-0+12 mod 8) – 4 = 0

d_{i+1} = (7– 0 + 12 mod 8) – 4 = 3 – 4 = –1

KR = $\frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}(-1) = -\frac{1}{2}$

B: d_{i-1} = (7 – 6 + 12 mod 8) – 4 = 1

d_i = (5 – 7 + 12 mod 8) – 4 = –2

d_{i+1} = (4 – 5 + 12 mod 8) – 4 = –1

KR = $\frac{1}{4}1 - \frac{1}{2}2 - \frac{1}{4}1 = -1$

C: d_{i-1} = (4 – 4 + 12 mod 8) – 4 = 0

d_i = (6 – 4 + 12 mod 8) – 4 = 2

d_{i+1}= (6 – 6 + 12 mod 8) – 4 = 0

KR = $\frac{1}{2}2 = 1$

- plausibler vergleich von B und C
- Werte interpretierbar

Aufgabe U18 (Konturapproximation)

(a) Ansatz für Kurve 2.Ordnung :

S(x,y) = Ax² + By² + Cx + Dy + Exy – F = 0

Forderung : Für p_i = *(x_i,y_i)(I=1..,n)* eingesetzt soll die Summe der Funktionswerte - Quadrate minimal werden :

$$Q = \sum_i S^2(x_i, y_i) = \sum_i (Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_i y_i - F)^2 \rightarrow Min!$$

Annahme : 0 liegt nicht auf der Kurve (Sonst verschieben)

Sei o.B.d.A. F = 1 (sonst durch F dividieren)

Im Minimum von Q(A,B,..,E) gilt :

$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0, \frac{\partial Q}{\partial B} = 0, ..., \frac{\partial Q}{\partial E} = 0;$ ausgerechnet:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = \sum x_i^2 \bullet 2(Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_i y_i - 1)! = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = \sum y_i^2 \bullet 2(Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_i y_i - 1)! = 0$$

.

.

.

$$\frac{\partial Q}{\partial E} = \sum x_i y_i \bullet 2(Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_i y_i - 1)! = 0$$

in Matrixform :

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^2 y_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 y_i \\ \sum x_i^2 y_i^2 & .... & ..... & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 \\ \sum y_i^2 \\ \sum x_i \\ \sum y_i \\ \sum x_i \, y_i \end{pmatrix}$$

die x_i, y_i sind bekannt => lineares Gleichungssystem in A,B,...,E; lösen!

(b)

- Ermittl. der Parameter der allg. Gleich. 2.Ordn.:Siehe(a)
- Verschiebung des Koordinatensystems, so dass die linearen Glieder verschwinden → neuer Koordinatenursprung = Mittelpunkt der Ellipse

Durchführung :

(x_m, y_m) sei der neue Ursprung (noch unbekannt)

$x = x_m + u$

$y = y_m + v$ (u,v) neue Koordinaten

⇨ $S(x,y) = S(X_m+u, y_m+v)$

$\Rightarrow A(x_m+u)^2 + B(y_m+v)^2 + C(x_m+u) + D(y_m+v) + E(x_m+u)(y_m+v) = 1$

$\Leftrightarrow Au^2+Bv^2 + Euv + (2Ax_m + C + Ey_m)u$
$+ (2By_m + D + Ex_m)v$
$+ Ax_m^2 + By_m^2 + Cx_m + Dy_m + Ex_m y_m = 1$

Forderung : lineare Glieder sollen = 0 werden:

$$\left.\begin{array}{l} 2\mathrm{Ax}_m + \mathrm{C} + \mathrm{Ey}_m = 0 \\ 2\mathrm{By}_m + D + \mathrm{Ex}_m = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\mathrm{Ax}_m + \mathrm{Ey}_m = -C \\ 2\mathrm{By}_m + \mathrm{Ex}_m = -D \end{array}\right.$$

die Cramersche Regel liefert als Lösung dieses lin. Gleichungssystem

$$x_m = \frac{\begin{vmatrix} -C & E \\ -D & 2B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2A & E \\ E & 2B \end{vmatrix}} = \frac{DE - 2BC}{4AB - E^2}$$

$$y_m = \frac{\begin{vmatrix} 2A & -C \\ E & -D \end{vmatrix}}{uAB - E^2} = \frac{CE - 2AD}{4AB - E^2}$$

Gleichung der Ellipse im (u,v)-System:
$Au^2 + Bv^2 + Euv = H$

Mit H =1- $Ax_m^2 - By_m^2 - Cx_m - Dy_m - Ex_m y_m$, oder in Matrixschreibweise(als Bilinearform) :

$$(u \quad v)\begin{vmatrix} A & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}E & B \end{vmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = H$$

- Bestimmung der Hauptachsen der Ellipse:

  Eigenwerte von M=$\begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}E & B \end{pmatrix}$bestimmen

  (M symmetrisch => die Eigenwerte sind reell):
  charakteristisches Polynom det$(M - \lambda I)$= 0

  $$= \begin{vmatrix} A-\lambda & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}E & B-\lambda \end{vmatrix} = (A-\lambda)(B-\lambda) - \tfrac{1}{4}E^2$$

  $$= \lambda^2 - (A+B)\lambda + AB - \tfrac{1}{4}E^2 \; != 0$$

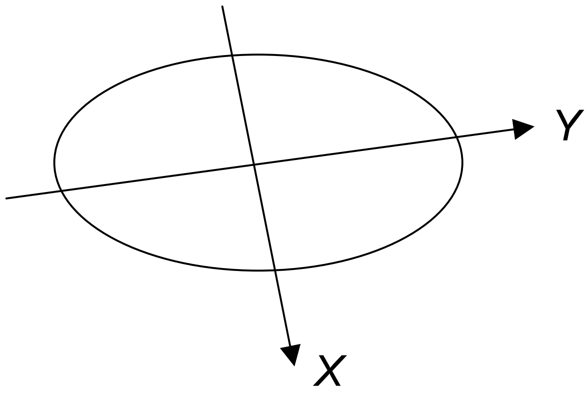
  $$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+B)^2}{4} - (AB - \tfrac{1}{4}E^2)}$$

  $$= \tfrac{1}{2}(A + B \pm \sqrt{(A-B)^2 + E^2})$$

Lösen von $(M - \lambda I)\vec{X}_\lambda$ = 0 (homogenes lin. Gleichungssystem.)

Liefert die Eigenvektoren $\vec{X}_\lambda$ (für jedes λ einzeln)
= Hauptachsenrichtungen

- Längen der Hauptachsen :
  Im Koordinatensystem der Hauptachsen lautet die Ellipsengleichung :
  $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = H$ (*X* gehört zur kürzeren Halbachse)



Länge a der großen Halbachse:
X = 0 , also $\lambda_2 Y^2 = H$; *Y* = $\pm a$

⇨ $a^2 = Y^2 = \frac{H}{\lambda_2}$ => $a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}$

Länge b der kleinen Halbachse analog : $b = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}$