Bildanalyse und Bildverstehen

Aufgabe U9

Gegeben sei die eindimensionale Faltungsmaske

$$F = \left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\}$$

(a) Man zeige: Es gibt keine faltungsinverse Maske G der Länge 7, für die also $F*G = I = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$ (= Einheitsfilter) erfüllt ist.

(b) Man bestimme eine Faltungsmaske F^+ der Länge 7, die die Summe der Abweichungsquadrate zwischen $F*F^+$ und I minimiert ("Pseudoinverse zu F").

Lösung zu Aufgabe U9

(a) Annahme : G faltungsinverse Maske der Länge 7 zu

$F = \left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\}$ sei $G=(g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$.

Es soll gelten :

$$\left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\} * \left\{g_0\ g_1\ \cdots\ g_6\right\} = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{4} \bullet g_0 = 0$$

$$\tfrac{1}{2} \bullet g_0 + \tfrac{1}{4} \bullet g_1 = 0$$

$$\tfrac{1}{4} \bullet g_0 + \tfrac{1}{2} \bullet g_1 + \tfrac{1}{4} \bullet g_2 = 0$$

....

usw.,

in Matrixschreibweise :

$$\tfrac{1}{4}\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}}_{A} \bullet \begin{Bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

rechte Seite

Lineares Gleichungssystem (LGS)

$$A_{erw}\left\{ A \left| \begin{matrix} rechter \\ seite \end{matrix} \right. \right\}$$

LGS Lösbar $\Leftrightarrow Rang(A) \quad = \quad Rang(A_{erw})$

LGS Lösbar $\Leftrightarrow Rang(A) = Rang(A_{erw})$
elementare Zeilenoperationen verändern dem Rang nicht.

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 2&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&2&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&4\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow Rang(A) < \mathrm{Rang}(A_{erw})!$$

⇨ *LGS nicht Lösbar.(die gilt auch für andere Länge von G)*

F^+: Faltungsmaske der Länge 7 die die Summen der der Abweichungsqu. zwischen $F * F^+$ und I minimiert.

Wir können annehmen das F^+ symmetrisch aufgebaut ist. (Vorteil: weniger Unbekannte)

Ansatz: $F^+ = [g_0 g_1 \dots g_6] = [d\ c\ b\ a\ b\ c\ d]$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} d\\ 2d+c\\ d+2c+b\\ c+2b+a\\ 2b+2a\\ a+2b+c\\ b+2c+d\\ c+2d\\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$S(a,b,c,d) = 2d^2 + 2(2d+c)^2 + 2(d+2c+b)^2$

$$S(a,b,c,d) = 2d^2 + 2(2d+c)^2 + 2(d+2c+b)^2 + (2a+2b-4)^2$$

$$= 6a^2 + 16ab + 4ac - 16a + 14b^2 + 16bc + 4bd - 16b + 12c^2 + 16cd + 12d^2 + 16$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a}(a,b,c,d) &= 12a + 16b + 4c - 16 \\
\frac{\partial S}{\partial b} &= 16a + 28b + 16c + 4d - 16 \\
\frac{\partial S}{\partial c} &= 4a + 16b + 24c + 16d \\
\frac{\partial S}{\partial d} &= 4b + 16c + 24d
\end{aligned}\right\} \overset{!}{=} 0$$

Extremwert-aufgabe !

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung dieses LGS mit Gaußschem Eliminationsverfahren

1	4	6	4	0
0	-8	-17	-12	4
0	-9	-20	-15	4
0	1	4	6	0

1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	15	36	4
0	0	16	39	4

1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	1	12/5	4/15
0	0	16	39	4

1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	1	22/5	4/15
0	0	0	3/5	-4/15

0	0	0	1	-4/9 => (d= - 4/9)

1	4	6	0	16/9
0	1	4	0	8/3
0	0	1	0	4/15+12/5*4/9=4/3 =>(c=4/3)
0	1	0	1	-4/9

1	4	0	0	16/9-24/3 = -56/9
0	1	0	0	8/3-16/3= -8/3 =>(b= -8/3)
0	0	1	0	4/3
0	1	0	1	-4/9

1	0	0	0	-56/9+ 32/3 =40/9 =>(a=40/9)
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	1	

⇨ $(a,b,c,d) = (\frac{40}{9}; -\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{4}{9}) = \frac{1}{9}(40; -24; 12; -4)$

also

$F^{+} = \frac{1}{9}(-4; 12; -24; 40; -24; 12; -4)$

$F * F^{+} = \frac{1}{9}(-1; 1; -1; 1; 8; 1; -1; 1; -1)$

$(\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}) * F^{+} = (-1, -2+3, -1+6-6$ ...

$F * F^{+} = (-0{,}11;\ 0{,}11; -0{,}11, +0{,}11, 0{,}89$ ...

$0{,}11, 0{,}11, -0{,}11$

0,11, -0,11, 0,11 0,11

Aufgabe U10

Die folgende pgm-Datei definiert einen "Graukeil":

P2
6 6 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

Man wende hierauf die folgenden Faltungsmasken an
(zentriert auf die Mitte der Maske, Matrixeinträge jenseits des Randes als 0 angenommen):

(a) Die beiden Komponenten des Sobel-Operators:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(b) die Laplace-Maske

$$h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Man approximiere mittels (a) Betrag und Richtung des Gradienten in jedem inneren Bildpunkt.

Lösung zu Aufgabe U10

(a) Anwendung der Sobel-Masken:

h_1:

$$\begin{Bmatrix} -1 & -4 & -8 & -12 & -16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 14 \end{Bmatrix}$$

h_2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & -12 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & -12 \end{Bmatrix}$$

(b)Anwendung der Laplace-Maske h_L:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \end{Bmatrix}$$

(C) grad f(x,y) = $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ wird approx durch 1/8 h_2 (Normierung durch Summe der Beträge der Einträge)

$\frac{\partial f}{\partial y}$ durch 1/8 h_1

$$\text{grad f} = (1;0) \quad \begin{cases} \text{in X} - \text{Richtung steigend} \\ \text{in y} - \text{Richtung konstant} \end{cases}$$

|grad f| = 1;

arg(grad f) = arctan($\frac{\partial f}{\partial x}$ / $\frac{\partial f}{\partial y}$) = arctan $0^0 = 0$

Aufgabe U11

Die partielle Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f(x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

kann im diskreten Fall durch $f(x+1, y) – f(x,y)$ oder durch

$f(x, y)–f(x–1, y)$ approximiert werden. Man verifiziere damit die in der

$f(x, y)-f(x-1, y)$ approximiert werden. Man verifiziere damit die in der Vorlesung gegebene Maske

$$h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für die diskrete Version des Laplace-Operators

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Lösung zu Aufgabe U11

1. Ableitung nach x : Maske (-1,1) ,also f(x+1,y)-f(x,y)

2. Ableitung nach x : Maske (0 –1 1) –(-1 1 0) =(1 –2 1),
also f(x+1,y)-2f(x,y)+f(x-1,y)

$f(x+1,y)-f(x,y) - [f(x,y) - f(x-1,y)]$

2. Ableitung nach y : analog , $\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Summe : $\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$

bzw . f(x+1,y) –2f(x,y)+f(x-1,y) +f(x,y+1)-2f(x,y)+f(x,y-1)

=-4f(x,y)+f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)