Lösung zu Aufgabe U5

(a) zu zeigen; $K*B = B*K$

sei $K*B = A$, mit $a_{jk} = \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet b_{j-m,k-n}$;

sei $B*K = A' = (a'_{jk})$ $a'_{jk} = \sum_p \sum_q b_{p,q} \bullet k_{j-p,k-q}$

Substituiere j-p = m, k-q=n:

$$a'_{jk} = \sum_m \sum_n b_{j-m,k-n} \bullet k_{m,n}$$

Summationsgrenzen:
$p=0,\dots,j$ (für $p>j$ wird Index bei k negativ)

$\Rightarrow$ $m = j-0, j-1, \dots, 0$ bzw. (umgekehrt) $m=0,\dots,j$
analog für q,n

$\Rightarrow$ $a'_{jk} = a_{jk}$

(b) z.z.: $K*(B+C) = K*B + K*C$ $= a'_{jk}$

~~(b) z.z.: $K*(B+C) = K*B + K*C$~~ z.z. $K*(B+C) = K*B+K*C$

(Wegen (a) gilt dann auch: $(K+L)*B = K*B+L*B$.)

Sei $A=(a_{jk}) = K*(B+C)$

$$a_{jk} = \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet (b_{j-m,k-n} + c_{j-m,k-n})$$
$$= \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet b_{j-m,k-n} + \sum_m \sum_n k_{m,n} c_{j-m,k-n}$$
$$= a'_{jk}$$ für $a'_{jk} = K*B+K*C$

Lösung zu Aufgabe U6:
(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & 1/3 & 1/3 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/9 & 4/9 & 2/3 & 2/3 & & \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ \cancel{0} & \cancel{0} & & & & & & \end{bmatrix} \quad 4/9 \quad 2/9$$

zu (b)

$$\begin{array}{cccccccc} & & & \vdots & & & & \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} & & & \vdots & & & & \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \end{array}$$

$$\cdots\cdots \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; \cdots\cdots \qquad +\frac{1}{3} \; -\frac{1}{3} \; +\frac{1}{3} \; -\frac{1}{3}$$

$$\cdots\cdots \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; \cdots\cdots \qquad +\frac{1}{3} \; -\frac{1}{3} \; +\frac{1}{3} \; -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ hohe Frequenzen werden nicht in allen Fällen ausgelöscht, Mittelwertfilter als Tiefpassfilter nicht uneingeschränkt geeignet

Lösung zu Aufgabe U7:

$$K*B-K*B_0 = K*(B-B_0) = K*R \text{ , sei } (a_{jk}) = K*R$$

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{2} \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{9} \cdot 1 \cdot r_{j-m,k-n} = \frac{1}{9} \sum \sum r_{j-m,k-n}$$

E ist linearer Operator

$$E(K*R) = \frac{1}{9} \sum \sum E(r_{j-m,k-n}) = \frac{1}{9} \cdot 0 = 0$$

Erwartungswert

$$Var(K*R) = E((K*R)^2) - \underbrace{(E(K*R))^2}_{=0} = E\left(\frac{1}{9} \sum \sum r_{j-m,k-n}\right)^2$$

r_{xy} und $r_{x'y'}$ stoch. unabh. für $(x'y') \neq (xy)$

$$= \frac{1}{81} \sum \sum (E(r^2_{j-m,k-n})) = \frac{1}{81} \sigma^2$$ – Standardabw.

die Varianz des Rauschanteils wird durch den Filter um den Faktor 1/81 vermindert, der Erwartungswert von B bleibt erhalten.

$\Rightarrow$ "Glättungsfilter" !

Lösung zu Aufgabe U8:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$,einfacher sind Binomialkoeffizienten aus dem Pascalschen Dreieck zu entnehmen:

$\binom{n}{0}$ → n=0

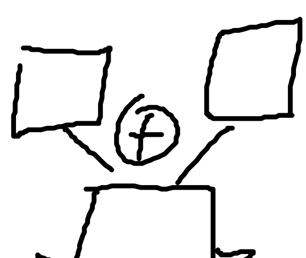
$\binom{n}{1}$ – 1 – n=1

1 1

$\binom{n}{2}$ – 1 2 1 – n=2

1 3 3 1

1 4 6 4 1



$B_1 = \frac{1}{2}[1, 1]$

$$B_2 = \frac{1}{4}[1,2,1]$$
$$B_3 = \frac{1}{8}[1,3,3,1]$$

2dim Form: $B_m^T \cdot B_n$

warum der Faktor $\frac{1}{2^n}$? $\rightarrow$ bewirkt Normierung auf Summe1, denn

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 2 & 6 & 6 & 2\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$-1 \quad +2$
$-2 \quad +4$
$-1 \quad +2$

Anwendung auf die periodischen Muster :

$1 \; -2 \; 1 \; 1 \; -2 \; 1 \; 1$

$1 \; -1 \; 1 \; -1 \; 1 \; -1 \; 1$

. . . .

$-\frac{1}{8} \quad +\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{8} \quad +\frac{1}{4} \qquad 0 \; 0 \; 0 \; 0$

$-\frac{1}{8} \quad +\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{8} \quad +\frac{1}{4} \qquad 0 \; 0 \; 0 \; 0$

$\rightarrow$ günstigeres Tiefpassverhalten als der einf. Mittelwertfilter