Aufgabe U2

Man führe für den Blaukanal des Bildes aus Aufgabe U1 die Histogramm-Einebnung durch.

Lösung zu Aufgabe U2

Werte des Blaukanals (3.Komponente der Zahlentripel) :

```
0   3   1   3
2   0   0   3
3   3   0   0
2   1   1   1
```

(a) Spreizung : $k_{min} = 0, k_{max} = 3, Max = 7$

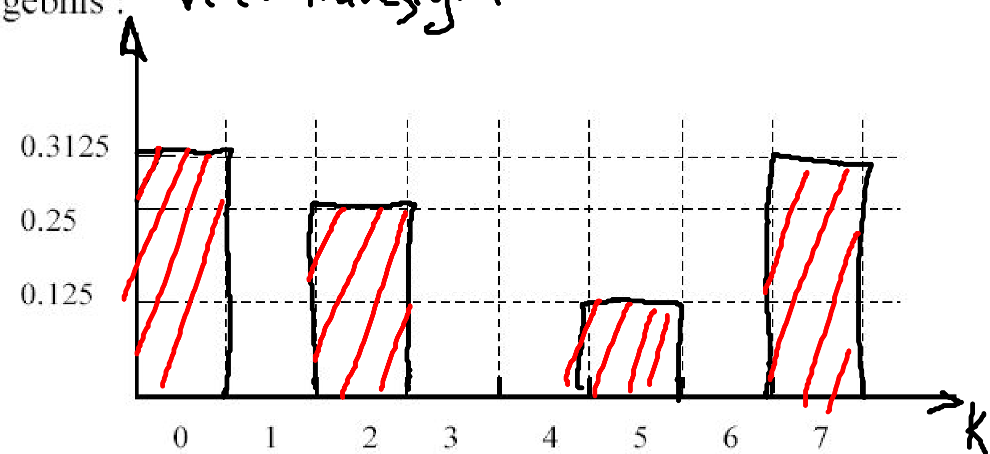
$$f(x) = round\left(\frac{x - k_{\min}}{k_{\max} - k_{\min}} \cdot Max\right)$$

Kmin = 0 , Kmax = 3, Max = 7

f(0) = round (0) = 0
f(1) = round ($\frac{1-0}{3-0} \cdot 7$) = round($\frac{7}{3}$) = 2
f(2) = round ($\frac{2}{3} \cdot 7$) = round( ) = 5
f(3) = round ($\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \cdot 7$) = round( ) = 7

f

Ergebnis : rel. Häufigk



(b) Einebnung :

$$g(x) = round(h_c(x) \cdot Max)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
Hc(x)	5/16	5/16	9/16	9/16	9/16	11/16	11/16	1

hc(x)	[illegible]/16	[illegible]/15	[illegible]/16	[illegible]/16	[illegible]/16	[illegible]/16	[illegible]/16	1

g(x) = round(hc(x) • 7)

9

g(0) = round(35/16) = 2
g(1) = round(35/16) = 2
g(2) = round(63/16) = 4
g(3) = round( ) = 4
g(4) = round( ) = 4
g(5) = round(77/16) = 5
g(6) = round( ) = 5
g(7) = 7

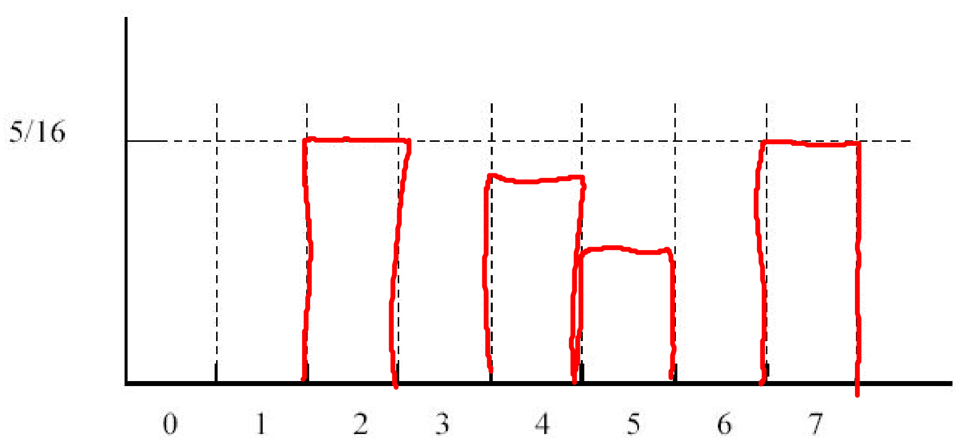
(c) beide Transformationen verkettet :

$$0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 2$$
$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4$$
$$2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 5$$
$$3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 7$$

Ausgangsbild:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

neues Histogramm nach der Transformation :



(d) Vollständige Einebnung durch Ausgleich zwischen über –
und unterbesetzten Klassen: (einfacher mit absoluten

Häufigkeiten)

	0	1	2	3	4	5	6	7
Ist	0	0	5	0	4	2	0	5
Soll	2	2	2	2	2	2	2	2

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist nicht eindeutig (Wahl der zu Verändernden Pixel randomisiert.)

Beachte :

- Wenn man Schritt 3 anwendet , kann man sich die Schritte 1 und 2 sparen!
- Nachteil des letzten Schrittes : Homogene Bereiche des Bildes werden inhomogen!
- Deshalb beschränkt man sich oft auf die Schritte 1+2(Spreizung +Transformation mittels hc)

Bildanalyse und Bildverstehen

Aufgabe U3

(a) Wie lauten die Basismatrizen der diskreten Fouriertransformation im Falle $L = R = 2$, also für 2×2-Matrizen?

(b) Man zeige, dass diese 4 Matrizen tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden.

(c) Wie lautet die Fouriertransformierte der folgenden Matrix:

$$(f_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;?$$

Bildanalyse und Bildverstehen

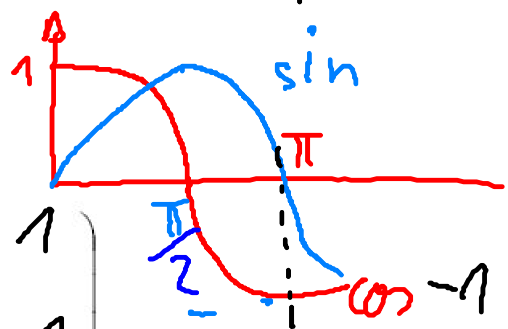
Lösung zu Aufgabe U3

(a)DFT – Basismatrizen allg. $B_{m,n} = \left(e^{2\pi i * \left(\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R}\right)}\right)$ j=0,...,L-1
k=0,...,R-1

$$B_{0,0} = \left(e^{2\pi i \bullet 0}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{0,1} = \left(e^{2\pi i \bullet (0 + k/2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 1 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$



$$B_{1,0} = \left(e^{2\pi i \bullet (j/2 + 0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{1,1} = \left(e^{2\pi i \bullet (j+k)/2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Lineare Unabhängigkeit :

$$a \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + d \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a + b + c + d = 0$ $\qquad$ $a + b = 0$ $\qquad$ $a = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c-d=0 \\ a+b-c-d=0 \\ a-b-c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ c+d=0 \\ c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} b=0 \\ c=0 \\ d= \end{matrix}$$

Wegen dim $\mathbb{C}^{2*2} = 4$ müssen die $B_{m,n}$ dann eine Basis bilden

Orthonormal? Zu prüfen: $\langle B;C\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } B \neq C \\ 1 & \text{für } B = C \end{cases}$

$$\langle B_{0,0}; B_{0,0} \rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} B_{0,0}(j,h) \bullet \overline{B_{0,0}(j,h)}$$

$$= \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1$$

analog für die anderen $\langle B_{m,n}; B_{m,n} \rangle$

$$\langle B_{0,0}; B_{0,1} \rangle = \frac{1}{4}\sum\sum B_{0,0}(j,h) \bullet \overline{B_{0,1}(j,h)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1(-1)\right) = 0$$

analog für die übrigen Kombinationen....

(c) DFT von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$g_{m,n} = \frac{1}{4} \bullet \sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_{jk} \bullet e^{-2\pi i\left(\frac{j}{2}m + \frac{k}{2}n\right)} \quad ,(m=0;1\ n=0;1)$$

m = n = 0 :

$e^0 = 1$

$$g_{00} = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$m=0,\ n=1$

$e^{-\pi i}$

$$g_{01} = \frac{1}{4}\left(1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 4\cdot(-1)\right)$$

arithm. Mittel von F

mittl. Intensität

$$= -\frac{1}{2}$$

$$g_{10} = \frac{1}{4}\left(1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 4\cdot(-1)\right)$$

$$= -1$$

$$g_{1,1} = \frac{1}{4}\left(1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1) + 4\cdot 1\right)$$

$$= 0$$

$$G = \begin{pmatrix} 5/2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$