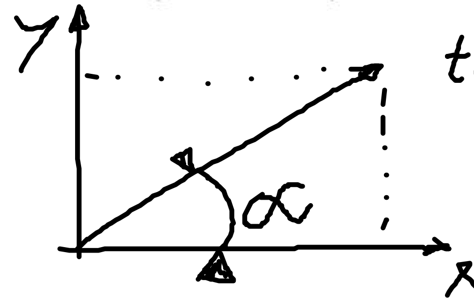
Lösung zu Aufgabe U20

(a) normalisierter Richtungsvektor $\vec{n}$ mit Richtung α in der xy- Ebene :



$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung von $\vec{m}$ bzgl. $\vec{n}$:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial \vec{n}} \\ \frac{\partial m_2}{\partial \vec{n}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial m_M}{\partial \vec{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_2}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_M}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_M}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial m_M}{\partial x} & \frac{\partial m_M}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = J \cdot \vec{n}$$

Jakobi-Matrix

Funktionalmatrix von $\vec{m}(x,y)$

Skalarprod.

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = \left\| J \cdot \vec{n} \right\|^2 = \left\langle J \cdot \vec{n}, \quad J \cdot \vec{n} \right\rangle = \left(J \cdot \vec{n} \right)^T \cdot \left(J \cdot \vec{n} \right) = \vec{n}^{\cdot T} J^T . J . \vec{n} = \vec{n}^{\cdot T} M . \vec{n}$$

$$\text{mit } M = J^T \bullet J = \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{2x} & \dots m_{Mx} \\ m_{1y} & m_{2y} & \dots m_{My} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ m_{Mx} & m_{My} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} m_{ix}^2 & \sum m_{ix} m_{iy} \\ \sum m_{ix} m_{iy} & \sum m_{iy}^2 \end{pmatrix}$$

(symmetrische Matrix)

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = (\cos\alpha \quad \sin\alpha) \bullet \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$f(\alpha) := \left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\| = \vec{n}^T \cdot M \cdot \vec{n} \longrightarrow \text{Max.}$$

Extremmalproblem unter Nebenbedingung $\left\| \vec{n} \right\|^2 = \vec{n}^T \cdot \vec{n} = 1$,

äquivalent zu Extremmalproblem . ohne NB:

$R\left(\vec{x}\right) := \dfrac{\vec{x}^T M \cdot \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}\cdot}$ -> Max (wegen $R\left(\vec{x}\right) = R(c \bullet \vec{x})$ für $c \neq 0$)

$R\left(\vec{x}\right)$ heißt Rayleigh-Quotient.

Aus der Lin.Algebra : Die Extremwerte von R sind die Eigenwerte von M, die Eigenvektoren von M lösen die Extremwertaufgabe.
Eigenwerte (EW) von M:

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = (A-\lambda)(c-\lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}$$

(b) Zahlenbeisp:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \frac{\partial m_3}{\partial x} & \frac{\partial m_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2y & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y^2 & 4xy \\ 4xy & 4x^2 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $x_0 = 1, y_0 = 2 : M = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

EW : $\lambda_{1,2} = \frac{20}{2} \pm \sqrt{(\frac{12}{2})^2 + 64} = 10 \pm \sqrt{100} = 10 \pm 10$

$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 0$

Eigenvektoren : zu λ_2: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Kern M : \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu λ_1: muss $\perp$ zu $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sein, also $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Probe : $\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normiert : $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{matrix}$ $(\alpha_1 = \arctan 2)$

$(M - \lambda I)\vec{x}_2 = 0$

$\sin\alpha$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad (\alpha_2 = \arctan(-1/2))$$

$$\|\vec{n}\|^2 = (2, 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 5$$

Wo ist Max. der Richtungsabl. ? =bei $\vec{n}_1$ (Wert 20)

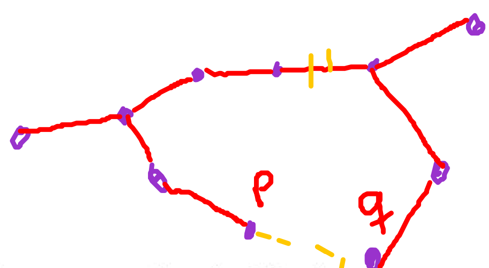
Probe : $$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}_1} \right\|^2 = 16\cos^2\alpha_1 + 2 \cdot 8 \cdot \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 + 4\sin^2\alpha_1 = \frac{16 \cdot 4}{5} + \frac{32}{5} + \frac{4}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}_2} \right\|^2 = \frac{16}{5} - \frac{32}{5} + \frac{16}{5} = 0$$

Aufgabe U21

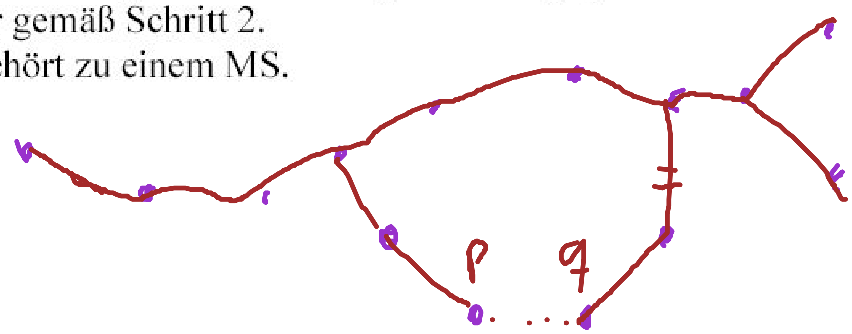
(a)Greedy- Algorithmus :

(1) Sei pq Punktepaar mit kürzesten Abstand.
Annahme : pq gehört nicht zu einem MST.
Sei B ein MST.



Verbinde pq in B, es entsteht ein Kreis
entferne eine andere Kante aus dem Kreis
=>neuer Graph ist MST ,Widerspruch

(2) T sei schon mit dem Algorithmus erzeugt und Subgraph eines MST B.
pq sei Punktepaar gemäß Schritt 2.
Annahme :pq gehört zu einem MS.



Wie in (1):
verbinde pq in B entferne andere Verbindungskante zwischen T und B\T aus B
=>entstehender Baum ist MST n. enthält pq, Widersr.
Mit Induktion über |T| folgt die Behauptung.

(b)