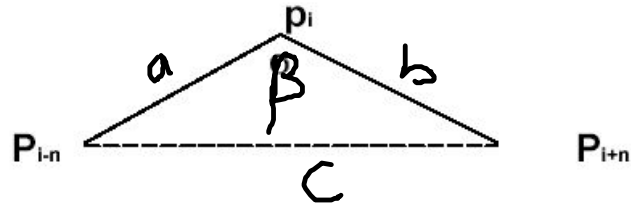


Bildanalyse und Bildverstehen

Lösung zu Aufgabe 17 (Konturkrümmung)

(a)

(1)



Kosinussatz : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$

$$\Rightarrow \beta = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

darin ist

$$a^2 = (x_i - x_{i-n})^2 + (y_i - y_{i-n})^2$$

$$b^2 = (x_i - x_{i+n})^2 + (y_i - y_{i+n})^2$$

$$c^2 = (x_{i+n} - x_{i-n})^2 + (y_{i+n} - y_{i-n})^2$$

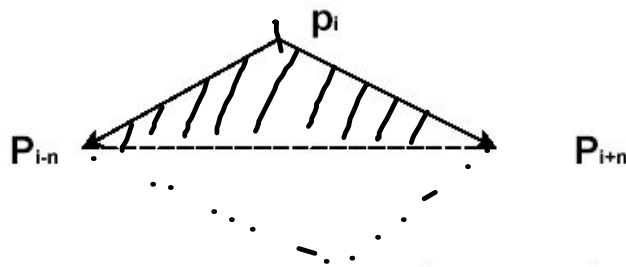
Beachte :

Verhalten dieses Krümmungsmaßes :

β klein \Rightarrow Krümmung groß

wähle deshalb $180^\circ - \beta$ bzw. $\pi - \beta$

(2)



$$\text{Parallelogrammfläche } A_{\text{par}} = \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow \text{Dreiecksfläche } A_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \right|$$

Mit Vorzeichen :

$$\begin{aligned} D_{\Delta} &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{i-n} - x_i & x_{i+n} - x_i \\ y_{i-n} - y_i & y_{i+n} - y_i \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} ((x_{i-n} - x_i)(y_{i+n} - y_i) - (x_{i+n} - x_i)(y_{i-n} - y_i)) \end{aligned}$$

(b)

(1) Punkt A : Winkel :

$$a^2 = 4 + 1 = 5, \quad b^2 = 5, \quad c^2 = 16$$

$$\beta_i = \arccos \frac{5 + 5 - 16}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \arccos \frac{-6}{10} = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \arccos -0.6 \approx 126.87^\circ$$

$$[180^\circ - \beta_1 \approx 53.13^\circ]$$

Punkt B : Winkel 90° [90°]

Punkt C : Formel liefert 90°

Korrekt wäre 270° [kzw. $180^\circ - 270^\circ = -90^\circ$]

Stelle wird nicht als konkav

erkannt! (Nachteil)

(2) vorzeichenbehaftete Fläche :

$$\mathbf{A:} \quad D_\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2+2) = 2$$

$$\mathbf{B:} \quad D_\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1+4) = \frac{5}{2}$$

$$\mathbf{C:} \quad D_\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow \text{konkav}$$

Aber : C hat bis aufs Vorzeichen gleichen Wert wie A => irreführendes Ergebnis

(3) gewichtete Richtungsabweichungen :

$$\mathbf{A:} \quad d_{i-1} = (0-1+12 \bmod 8) - 4 = 3-4 = -1$$

$$d_i = (0-0+12 \bmod 8) - 4 = 0$$

$$d_{i+1} = (7-0+12 \bmod 8) - 4 = 3-4 = -1$$

$$\mathbf{KR} = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{B:} \quad d_{i-1} = (7-6+12 \bmod 8) - 4 = 1$$

$$d_i = (5-7+12 \bmod 8) - 4 = -2$$

$$d_{i+1} = (4-5+12 \bmod 8) - 4 = -1$$

$$\mathbf{KR} = \frac{1}{4}1 - \frac{1}{2}2 - \frac{1}{4}1 = -1$$

$$\mathbf{C:} \quad d_{i-1} = (4-4+12 \bmod 8) - 4 = 0$$

$$d_i = (6-4+12 \bmod 8) - 4 = 2$$

$$d_{i+1} = (6-6+12 \bmod 8) - 4 = 0$$

$$\mathbf{KR} = \frac{1}{2}2 = 1$$

- plausibler Vergleich von B und C

- Werte interpretierbar

Aufgabe U18 (Konturapproximation)

(a) Ansatz für Kurve 2. Ordnung :

$$S(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy - F = 0$$

Forderung : Für $P_i = (x_i, y_i)$ ($i=1, \dots, n$) eingesetzt soll die Summe der Funktionswerte-Quadrate minimal werden :

$$Q = \sum_i S^2(x_i, y_i) = \sum_i (Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_i y_i - F)^2 \rightarrow \text{Min!}$$

Annahme : 0 liegt nicht auf der Kurve (Sonst verschieben)

Sei o.B.d.A. $F=1$ (sonst durch F dividieren)

Im Minimum von $Q(A, B, \dots, E)$ gilt :

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial B} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial C} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial D} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial E} = 0$$

$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0, \frac{\partial Q}{\partial B} = 0, \dots, \frac{\partial Q}{\partial E} = 0$; ausgerechnet:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = \sum x_i^2 \cdot 2(Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_i y_i - 1) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = \sum y_i^2 \cdot 2(Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_i y_i - 1) = 0$$

⋮

$$\frac{\partial Q}{\partial E} = \sum x_i y_i \cdot 2(Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i + Dy_i + Ex_i y_i - 1) = 0$$

in Matrixform :

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^2 y_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 y_i \\ \sum x_i^2 y_i^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 \\ \sum y_i^2 \\ \sum x_i \\ \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

die x_i, y_i sind bekannt \Rightarrow lineares Gleichungssystem in A, B, \dots, E ; lösen!

(b)

- Ermittlung der Parameter der allg. Gleichung 2.Ordn.: Siehe(a)
- Verschiebung des Koordinatensystems, so dass die linearen Glieder verschwinden \rightarrow neuer Koordinatenursprung = Mittelpunkt der Ellipse

Durchführung :

(x_m, y_m) sei der neue Ursprung (noch unbekannt)

$$x = x_m + u$$

$$y = y_m + v$$

(u, v) neue Koordinaten

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow S(x, y) &= S(x_m + u, y_m + v) \\ &= A(x_m + u)^2 + B(y_m + v)^2 + C(x_m + u) + D(y_m + v) \\ &\quad + E(x_m + u)(y_m + v) = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Au^2 + Bv^2 + Euv + (2Ax_m + C + Ey_m)u$$

$$+ (2By_m + D + Ex_m)v$$

$$+ Ax_m^2 + By_m^2 + Cx_m + Dy_m + Ex_m y_m = 1$$

Forderung : lineare Glieder sollen = 0 werden:

$$\left. \begin{aligned} 2Ax_m + C + Ey_m &= 0 \\ 2By_m + D + Ex_m &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Ax_m + Ey_m = -C \\ 2By_m + Ex_m = -D \end{cases}$$

die Cramersche Regel liefert als Lösung dieses lin. Gleichungssystem

$$x_m = \frac{\begin{vmatrix} -C & E \\ -D & 2B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2A & E \\ E & 2B \end{vmatrix}} = \frac{DE - 2BC}{4AB - E^2}$$

$$y_m = \frac{\begin{vmatrix} 2A & -C \\ E & -D \end{vmatrix}}{uAB - E^2} = \frac{CE - 2AD}{4AB - E^2}$$

Gleichung der Ellipse im (u,v)-System:

$$Au^2 + Bv^2 + Euv = H$$

Mit $H = 1 - Ax_m^2 - By_m^2 - Cx_m - Dy_m - Ex_my_m$, oder in

Matrixschreibweise (als Bilinearform) :

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{vmatrix} A & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}E & B \end{vmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = H$$

- Bestimmung der Hauptachsen der Ellipse:

Eigenwerte von $M = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}E & B \end{pmatrix}$ bestimmen

(M symmetrisch => die Eigenwerte sind reell):

charakteristisches Polynom $\det(M - \lambda I) = 0$

$$= \begin{vmatrix} A - \lambda & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}E & B - \lambda \end{vmatrix} = (A - \lambda)(B - \lambda) - \frac{1}{4}E^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \lambda^2 - (A + B)\lambda + AB - \frac{1}{4}E^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A + B}{2} \pm \sqrt{\frac{(A + B)^2}{4} - (AB - \frac{1}{4}E^2)}$$

$$= \frac{1}{2}(A + B \pm \sqrt{(A - B)^2 + E^2})$$

Lösen von $(M - \lambda I)\vec{x}_\lambda = 0$ (homogenes lin. Gleichungssystem.)

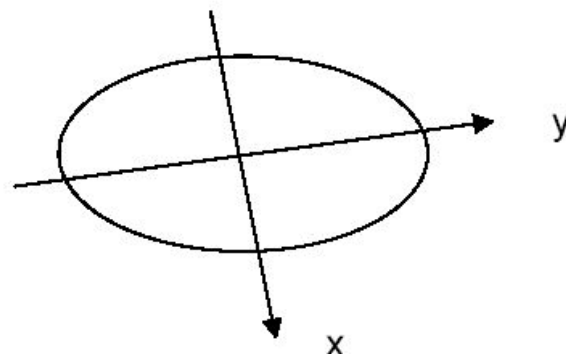
Liefert die Eigenvektoren \vec{x}_λ (für jedes λ einzeln)

= Hauptachsenrichtungen

- Längen der Hauptachsen :

Im Koordinatensystem der Hauptachsen lautet die Ellipsengleichung :

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = H \quad (X \text{ gehört zur kürzeren Halbachse})$$



Länge a der großen Halbachse:

$$X=0, \text{ also } \lambda_2 y^2 = H; y = \pm a$$

$$\Rightarrow a^2 = y^2 = \frac{H}{\lambda_2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}$$

Länge b der kleinen Halbachse analog : $b = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}$