Bildanalyse und Bildverstehen

Lösung zu Aufgabe U12

Zu zeigen $E_B = CD_BC$

Anwendung der Definition : $D_B(X) = \bigcup_{b \in B} X_{-b}$

$$E_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$$

$$CD_BC(X) = C(\bigcup_{b \in B}(CX_{-b}))$$

$$= \bigcap_{b \in B} C(CX)_{-b}$$ (Komplement einer Vereinigungsmenge ist Durchschnitt der Komplemente)

$$= \bigcap_{b \in B} CC(X)_{-b} = \bigcap_{b \in B}(X)_{-b} = E_B(X)$$

Lösung zu Aufgabe U13

Zu zeigen : Die Öffnungsoperation O_B für Binarbilder ist monoton und anti-extensiv

(a) Zunächst : Monotonie der Dilatation

z.z. : $X \subseteq Y \Rightarrow D_B(X) \subseteq D_B(Y)$

Nachweis :

$$D_B(X) = \{x | \exists b \in B; x + b \in X\}$$

$$x + b \in X \subseteq Y \Rightarrow x + b \in Y$$

$$x \in D_B(X) \Rightarrow x \in D_B(Y)$$

also $D_B(X) \subseteq D_B(Y)$

E = CDC(Aufgabe U12) , C ist antiton

($X \subseteq Y \Rightarrow CX \geq CY$)

$\Rightarrow$ mit D ist auch E monoton

OB = $D_{-B}E_B$ sonst ebenfalls monoton

(b) OB „anti-extensiv" heißt = $X \supseteq O_B(X)$

z.z.: $x \in O_B(X) \Rightarrow x \in X$

Nachweis:

$$x \in O_B(X) \Leftrightarrow x \in D_{-B}(E_B(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in -B : x + b \in E_B(X)$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B : x - b \in E_B(X)$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B\ \forall c \in B : (x - b) + c \in X$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B\ \forall c \in B : x + (c - b) \in X$$

Wähle nun speziell c = b :

$$\Rightarrow \exists b\in B: x+(b-b)=x\in X \quad \checkmark$$

Lösung zu Aufgabe U14(Grauumlometrie)

$O_{a\cdot B}$ monoton und anti-extensiv ,klar nach Aufgabe U13.

Nach zu zeigen : Absorptionseigenschaft

$$\forall a,b\geq 0: g_a g_b = g_b g_a = g_{\max(a,b)}, (g_x \overset{mit}{=} O_{x\cdot B})$$

Sei o.B.d.A a≥b . z.z.: (1) $O_{a\bullet B}O_{b\bullet B}=O_{a\bullet B}$

und: (2) $O_{b\bullet B}O_{a\bullet B}=O_{a\bullet B}$

zunächst der Fall b=0 :

$$D_{\{0\}}(X)=\bigcup_{b\in\{0\}} X_{-b}=X_0=X$$

$$E_{\{0\}}(X)=\bigcap ...=X_0=X$$

also $D_{\{0\}}=E_{\{0\}}=O_{\{0\}}$=I (identische Abb.)

$O_{a\bullet B}O_{o\bullet B}=O_{a\bullet B}I=O_{a\bullet B}$, ebenso für (2).

Sei jetzt b>0

$a\geq b>0$, es ist $0\leq\frac{b}{a}\leq 1$ und $0\leq 1-\frac{b}{a}<1$

Sei k>0 ,wir charakterisieren die Elemente von

$O_{k\bullet B}(x)$: vgl .U13(b).Beweis

$$X\in O_{k\bullet B}(X)\Leftrightarrow \exists c\in k\bullet B\ \ \forall d\in k\bullet B: x+(d-c)\in X$$

$$\Leftrightarrow \exists \tfrac{c}{k}\in B\ \ \forall \tfrac{d}{k}\in B: x+(d-c)\in X$$

$e=\frac{c}{k}$

$f=\frac{d}{k}$

$$\Leftrightarrow \exists e\in B\ \ \forall f\in B: x+k(f-e)\in X$$

(1) (i) z.z.: $O_{a\bullet B}O_{b\bullet B}\subseteq O_{a\bullet B}$

$$\mathrm{x}\in O_{a\bullet B}(O_{b\bullet B}(x))\Leftrightarrow \exists e\in B\ \forall f\in B\ \exists c\in B:\ \forall \mathrm{d}\in \mathrm{B}: \mathrm{x}+\mathrm{a}(\mathrm{f}-e)+\mathrm{b}(\mathrm{d}-\mathrm{c})\in \mathrm{X}\ (*)$$

setze speziell d=c :

$$(*)\quad \Rightarrow X+a(f-e)\in X\Rightarrow \mathrm{x}\in O_{a\bullet B}(X)$$

(ii) z.z.: $O_{a\bullet B}O_{b\bullet B}\supseteq O_{a\bullet B}$

$$\mathrm{x}\in O_{a\bullet B}(x)\Leftrightarrow \exists e\in B\ \forall \mathrm{f}\in \mathrm{B}: \mathrm{x}+\mathrm{a}(\mathrm{f}-\mathrm{e})\in \mathrm{X}\ \ (\#)$$

z.z: $\forall \mathrm{f}\in \mathrm{B}\ \exists \mathrm{c}\in \mathrm{B}\ \forall \mathrm{d}\in: \mathrm{B}: \mathrm{x}+\mathrm{a}(\mathrm{f}-\mathrm{e})+\mathrm{b}(\mathrm{d}-\mathrm{c})\in \mathrm{X}$

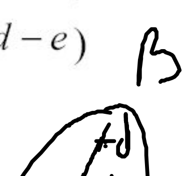
wähle c:=f:

$$\text{x+a(f-e)+b(d-f)} = \text{x+a}(1\cdot f-\tfrac{b}{a}f+\tfrac{b}{a}d-e)$$

$$= \text{x+a}[(1-\tfrac{b}{a})f+\tfrac{b}{a}d-e)$$

Konvexkombination von f und d !

f,d∈ B $\Rightarrow f'\in B$, da B konvex



x+a(f' - e) $\in X$, wegen (#)

(2) geht analog.

Lösung zu Aufgabe U15

aB Liniensegment der Länge a

1D – Binärbild : <u>0111100111100010011111</u>

$O_{1\bullet B} = I$ P(1)=4 Zusammenhangskomponenten,

A(g1,X) = 14 (Fläche = Zahl der 1-pixel),

$O_{2\bullet B} = D_{-2\bullet B} E_{2\bullet B}$, $2\bullet B =$ | | * | $-2\bullet B =$ | * | |

	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
E2B	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
O2B	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

⇨ p(2)=3 , $A(g_2 X) = 13$, $\Delta A = +1$

3B:

	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
E_{3B}	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
O_{3B}	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

⇨ p(3)=3 , $A(g_3 X) = 13$, $\Delta A = 0$

4B: B -B

	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
E_{4B}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
O_{4B}	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

⇨ p(4)=3 , $A(g_4 X) = 13$, $\Delta A = 0$

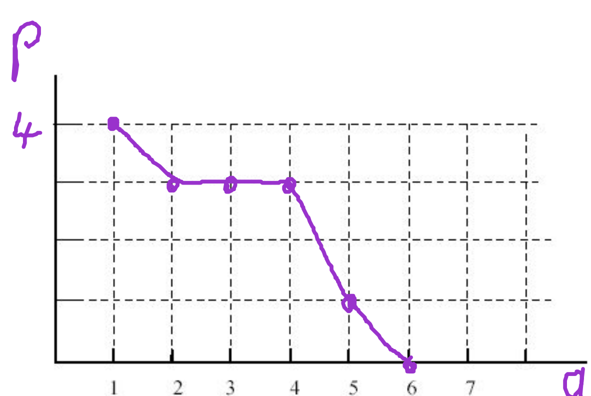
5B:

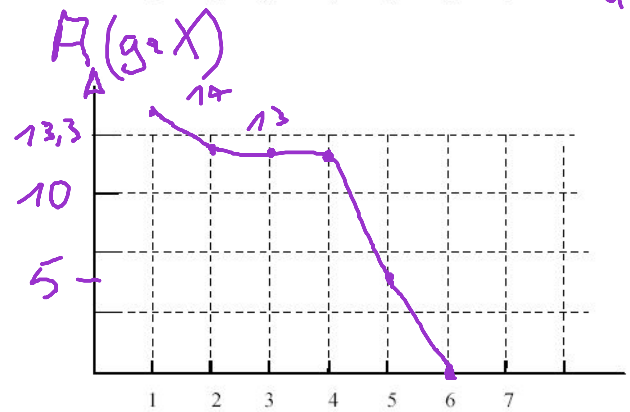
	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
E_{5B}	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
O_{5B}	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1

⇨ p(5)=1 , $A(g_5 X) = 5$, $\Delta A = 8$

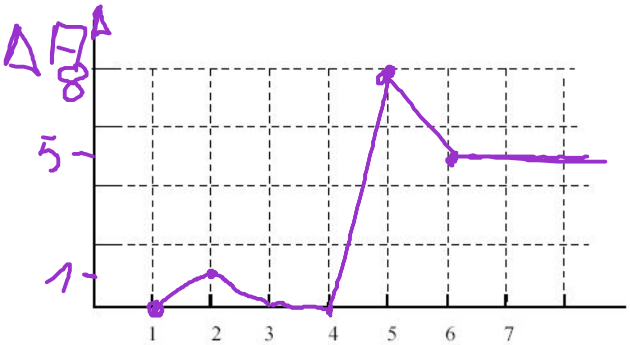
O6B : alles Nullen

⇨ p(6)=1, $A(g_6 X) = 0$, $\Delta A = 5$





A(g, X)
14
13
13,3
10
5
1
2
3
4
5
6
7



ΔA
8
5
1
1
2
3
4
5
6
7