Bildanalyse und Bildverstehen

Aufgabe U9

Gegeben sei die eindimensionale Faltungsmaske

$$F = \left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\}$$

(a) Man zeige: Es gibt keine faltungsinverse Maske G der Länge 7, für die also $F^*G = I$ = (0 0 0 0 1 0 0 0 0) (= Einheitsfilter) erfüllt ist.

(b) Man bestimme eine Faltungsmaske F^+ der Länge 7, die die Summe der Abweichungsquadrate zwischen $F^* F^+$ und I minimiert ("Pseudoinverse zu F").

Lösung zu Aufgabe U9

(a) Annahme : G faltungsinverse Maske der Länge 7 zu

$F = \left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\}$ sei G=(g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6).

Es soll gelten :

$$\left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\} * \left\{g_0\ g_1\ \cdots\ g_6\right\} = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{4} \bullet g_0 = 0$$

$$\tfrac{1}{2} \bullet g_0 + \tfrac{1}{4} \bullet g_1 = 0$$

$$\tfrac{1}{4} \bullet g_0 + \tfrac{1}{2} \bullet g_1 + \tfrac{1}{4} \bullet g_2 = 0$$

....

usw.,

in Matrixschreibweise :

$$\underbrace{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \bullet \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{rechte Seite}}$$

Lineares Gleichungssystem (LGS)

$$A_{erw}\left\{ A \,\middle|\, \begin{matrix} rechter \\ seite \end{matrix} \right\}$$

LGS Lösbar $\Leftrightarrow Rang(A) = Rang(A_{erw})$

LGS Lösbar ...

elementare Zeilenoperationen verändern dem Rang nicht.

$$\frac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 2&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&2&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&4\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow Rang(A)$ | Rang(A_{erw})!

⇨ *LGS nicht Lösbar.(die gilt auch für andere Länge von G)*

Lösung dieses LGS mit Gaußschem Eliminationsverfahren

1	4	6	4	0
0	-8	-17	-12	4
0	-9	-20	-15	4
0	1	4	6	0
1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	15	36	4
0	0	16	39	4
1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	1	12/5	4/15
0	0	16	39	4
1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	1	22/5	4/15
0	0	0	3/5	-4/15
0	0	0	1	-4/9 => (d= - 4/9)
1	4	6	0	16/9
0	1	4	0	8/3
0	0	1	0	4/15+12/5*4/9=4/3 =>(c=4/3)
0	1	0	1	-4/9
1	4	0	0	16/9-24/3 = -56/9
0	1	0	0	8/3-16/3= -8/3 =>(b= -8/3)
0	0	1	0	4/3
0	1	0	1	-4/9
1	0	0	0	-56/9+ 32/3 =40/9 =>(a=40/9)
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	1	

$\Rightarrow$ (a,b,c,d) =$(\frac{40}{9};-\frac{8}{3};\frac{4}{3};-\frac{4}{9})$ =$\frac{1}{9}$(40; -24;12;-4)

also

F^+ = $\frac{1}{9}$ (-4; 12; -24; 40; -24; 12; -4)

F*F^+= $\frac{1}{9}$(-1; 1; -1; 1; 8; 1; -1; 1; -1)

≈ [-0,11; 0,11; -0,11, 0,11, 0,89, 0,11 -0,11; 0,11, -0,11]

<u>Aufgabe U10</u>

Die folgende pgm-Datei definiert einen "Graukeil":

P2
6 6 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

Man wende hierauf die folgenden Faltungsmasken an
(zentriert auf die Mitte der Maske, Matrixeinträge jenseits des Randes als 0 angenommen):

(a) Die beiden Komponenten des Sobel-Operators:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(b) die Laplace-Maske

$$h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Man approximiere mittels (a) Betrag und Richtung des Gradienten in jedem inneren Bildpunkt.

<u>Lösung zu Aufgabe U10</u>

(a) Anwendung der Sobel-Masken:

h_1:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -8 & -12 & -16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

h_2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & -12 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

(b)Anwendung der Laplace-Maske h_L:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

(C) grad f(x,y) = $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ wird approx durch 1/8 h_2 (Normierung durch Summe der Beträge der Einträge)

$\frac{\partial f}{\partial x}$ durch $\frac{1}{8} h_2$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ durch 1/8 h_1

$$\text{grad f} = (1;0) \quad \begin{cases} \text{in X} - \text{Richtung steigend} \\ \text{in y} - \text{Richtung konstant} \end{cases}$$

|grad f| = 1;

arg(grad f) = arctan($\frac{\partial f}{\partial y}$ / $\frac{\partial f}{\partial x}$) = arctan 0 = 0°

<u>Aufgabe U11</u>

Die partielle Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f(x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

kann im diskreten Fall durch $f(x+1, y)-f(x,y)$ oder durch $f(x, y)-f(x-1, y)$ approximiert werden. Man verifiziere damit die in der Vorlesung gegebene Maske

$$h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für die diskrete Version des Laplace-Operators

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

<u>Lösung zu Aufgabe U11</u>

1. Ableitung nach x : Maske (-1,1) ,also f(x+1,y)-f(x,y)

2. Ableitung nach x : Maske (0 –1 1) –(-1 1 0) =(1 –2 1),
   also f(x+1,y)-2f(x,y)+f(x-1,y)

2. Ableitung nach y : analog , $\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Summe : $\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$

bzw . f(x+1,y) –2f(x,y)+f(x-1,y) +f(x,y+1)-2f(x,y)+f(x,y-1)

=-4f(x,y)+f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)