Lösung zu Aufgabe U5

(a) zu zeigen; $K*B = B*K$

sei $K*B = A$, mit $a_{jk} = \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet b_{j-m,k-n}$;

sei $B*K = A' = (a'_{jk})$ $a'_{jk} = \sum_p \sum_q b_{p,q} \bullet k_{j-p,k-q}$

Substituiere j-p = m, k-q=n:

$$a'_{jk} = \sum_m \sum_n b_{j-m,k-n} \bullet k_{m,n}$$

Summationsgrenzen:
$p=0,\ldots,j$ (für $p>j$ wird Index bei k negativ)

$\Rightarrow$ $m= j-0, j-1,\ldots, 0$ bzw. (umgekehrt) $m=0,\ldots,j$
analog für q,n

$\Rightarrow$ $a'_{jk} = a_{jk}$

(b) z.z.: $K*(B+C) = K*B + K*C$

wegen a) gilt:

$$(K+L)*B = K*C + C*B$$

Sei $A = (a_{jk}) = \sum\sum k_{mn}\left(b_{j-m,k-n} + c_{j-m,k-n}\right)$

$$= \sum\sum\left(k_{mn}\, b_{j-n\, k-n} + k_{nn}\, c_{j-m,k-n}\right)$$

$$= K*B + K*C = (a'_{jk})$$

(b) z.z.: $K*(B+C) = K*B + K*C$

(Wegen (a) gilt dann auch: $(K+L)*B = K*B+L*B$.)

Sei $A=(a_{jk}) = K * (B + C)$

$$
\begin{aligned}
a_{jk} &= \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet (b_{j-m,k-n} + c_{j-m,k-n}) \\
&= \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet b_{j-m,k-n} + \sum_m \sum_n k_{m,n} c_{j-m,k-n} \\
&= a'_{jk}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe U6:

(a)

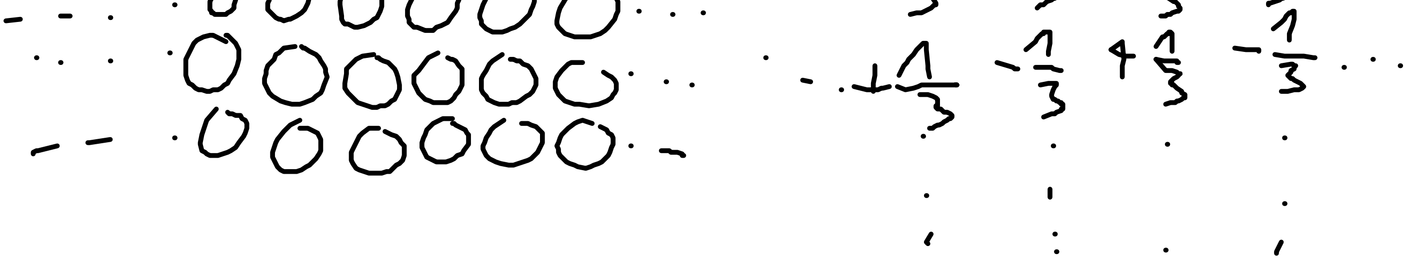
$$
K = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
B = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \\
0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\
0 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{6}{9} & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\
0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{9}{9} & \frac{1}{9} \\
\cancel{0} & \cancel{0} & & & & & &
\end{bmatrix}
$$

zu (b)

$$
\begin{matrix}
 & & & \vdots & & & & \\
\cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\
 & & & \vdots & & & &
\end{matrix}
\qquad
\begin{matrix}
 & & & \vdots & & & & \\
\cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\
\cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\
\cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\
 & & & \vdots & & & &
\end{matrix}
$$

$\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \dots$



$\Rightarrow$ hohe Frequenzen werden nicht in allen Fällen ausgelöscht, Mittelwertfilter als Tiefpassfilter nicht uneingeschränkt geeignet

Lösung zu Aufgabe U7:

$$K*B-K*B_0 = K*(B-B_0) = K*R\,,\ sei\ (a_{jk}) = K*R$$

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{2}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{9}\cdot 1\cdot r_{j-m,k-n} = \frac{1}{9}\sum\sum r_{j-m,k-n}$$

linearer Operator

$$E(K*R) = \frac{1}{9}\sum\sum E(r_{j-m,k-n}) = \frac{1}{9}\cdot 0 = 0$$

$$Var(K*R) = E((K*R)^2) - \underbrace{(E(K*R))^2}_{=0} = E\left(\frac{1}{9}\sum\sum r_{j-m,k-n}\right)^2$$

$r_{x'y'}$ u r_{xy} stochastisch unabh. für $(x'y') \neq (x,y)$

Erwartungswert des Prod. $= 0$

$$= \frac{1}{81}\sum\sum(E(r_{j-m,k-n}^2)) = \frac{1}{81}\sigma^2$$

die Varianz des Rauschanteils wird durch den Filter um den Faktor 1/81 vermindert, der Erwartungswert von B bleibt erhalten.

$\Rightarrow$ "Glättungsfilter" !

Lösung zu Aufgabe U8:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$,einfacher sind Binomialkoeffizienten aus dem

Pascalschen Dreieck zu entnehmen:

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[1 \quad 1\right]$$
$$B_2 = \frac{1}{4}\left[1 \quad 2 \quad 1\right]$$
$$B_3 = \frac{1}{8}\left[1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\right]$$

$\binom{n}{0}$ – 1 – $n=0$

$\binom{n}{1}$ – 1 1 – $n=1$

$\binom{n}{2}$ – 1 2 1 – $n=2$

...

2dim Form: $B_m^T \cdot B_n$

warum der Faktor $\frac{1}{2^n}$? $\rightarrow$ bewirkt Normierung auf Summe1, denn

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k \cdot 1^{n-k} \underset{\text{bin Formel}}{=} (1+1)^n = 2^n$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 2 & 6 & 6 & 2\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Anwendung auf die periodischen Muster :

1.) $-\frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \dots\dots$

$-\frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \dots\dots$

4 4

⋮

2 . . . 0 0 0 0 0 . . .

. . . . . 0 0 0 0 0 . . .

günstigeres Verhalten für Tiefpass als Mittelwertfilter