Aufgabe 29

Für die folgenden 1-dimensionalen "Texturen" (Grauwertmuster) mit Grauwerten aus {0; 1; 2; 3} sollen die folgenden Merkmale bestimmt werden: Mittelwert, Standardabweichung, Schiefe (der Grauwertverteilung; vgl. Übung 1), Cooccurrence-Matrix (bzgl. direkter Nachbarschaft).

(a)

0	0	1	1	2	2	3	3

(b)

0	2	1	3	0	2	1	3

(c)

0	0	0	3	0	0	0	3

Mittelwerte: (a) 1,5 , (b) 1,5 , (c) 0,75

Standardabweichung:

(a) $s = \sqrt{\frac{1}{7}\sum(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{7}(2\cdot 1{,}5^2+2\cdot 0{,}5^2+2\cdot 0{,}5^2+2\cdot 1{,}5^2)}$

$= \sqrt{\frac{10}{7}} \approx 1{,}19523$

(b) selber Wert

(c) $s = \sqrt{\frac{1}{7}(6\cdot 0{,}75^2+2\cdot 2{,}25^2)} = \sqrt{\frac{13{,}5}{7}} \approx 1{,}38873$

Schiefe $= \frac{1}{N\cdot s^3}\sum(x_i-\bar{x})^3$

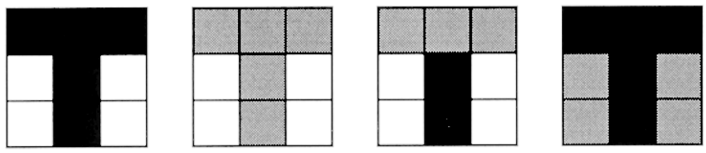
(a), (b) 0

(c) $\frac{1}{8\cdot 1{,}38873^3}\cdot\left(6\cdot(-0{,}75)^3+2\cdot(2{,}25)^3\right) \approx \frac{25{,}3125}{21{,}4261} \approx 1{,}1814$

Cooccurrence-Matrix:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 30
Die Skizze zeigt ein Sollbild (a) und 3 davon abweichende Bilder (b–d). Die 9 Pixel haben einen von drei möglichen Grauwerten.



a b c d

Berechnen Sie die Ähnlichkeiten von (ab), (ac) und (ad) mit Hilfe der normierten Kreuzkorrelation (Pearsonscher Korrelationskoeffizient). Inwieweit hängt das Ergebnis von den gewählten numerischen Werten der Grauwerte ab?

$r_{ab} = r_{ad} = 1$, da ein ungestörter linearer Zusammenhang mit positiver Steigung zwischen den Grauwerten der Pixel im ersten Bild und den Grauwerten der entsprechenden Pixel im zweiten Bild besteht.

Voraussetzung an die numerischen Werte der Grauwerte: Grau liegt zwischen Schwarz und Weiß. Ansonsten ist dieses Ergebnis unabhängig von den Zahlenwerten.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}$$

r_{ac}: $0 < r_{ac} < 1$.

Sei Schwarz = 0, Grau = 1, Weiß = 2. Dann gilt:

Mittelwert für Bild (a) = $\bar{a} = \frac{1}{9}(4 \cdot 2 + 5 \cdot 0) = \frac{8}{9}$,

Mittelwert für Bild (c) = $\bar{c} = \frac{1}{9}(4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{11}{9}$,

Wurzel der nicht-normierten Varianz für (a) =

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{9}(a_i - \bar{a})^2} = \sqrt{5 \cdot \left(0 - \tfrac{8}{9}\right)^2 + 4 \cdot \left(2 - \tfrac{8}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{9}} \approx 2{,}9814 \ ,$$

Wurzel der nicht-normierten Varianz für (c) =

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{9}(c_i - \bar{c})^2} = \sqrt{4 \cdot \left(2 - \tfrac{11}{9}\right)^2 + 3 \cdot \left(1 - \tfrac{11}{9}\right)^2 + 2 \cdot \left(0 - \tfrac{11}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{9}} \approx 2{,}3570 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{9}(a_i - \bar{a})(c_i - \bar{c}) = 4 \cdot (2 - \tfrac{8}{9}) \cdot (2 - \tfrac{11}{9}) + 3 \cdot (0 - \tfrac{8}{9}) \cdot (1 - \tfrac{11}{9}) + 2 \cdot (0 - \tfrac{8}{9}) \cdot (0 - \tfrac{11}{9}) = \frac{504}{81} = \frac{56}{9} \approx 6{,}222$$

$$r_{ac} = \frac{\sum (a_i - \bar{a})(c_i - \bar{c})}{\sqrt{\sum (a_i - \bar{a})^2 \sum (c_i - \bar{c})^2}} \approx \frac{6{,}222}{2{,}9814 \cdot 2{,}357} \approx 0{,}8855$$ *(3 P.)*

Das Ergebnis hängt von der Wahl der numerischen Grauwerte ab. Je näher der Wert für "Grau" an dem für "Schwarz", desto größer die Korrelation (wird im Grenzfall 1). *(1 P.)*

(Zum Vergleich noch die Zwischenergebnisse für r_{ab} und r_{ad} , die aber nicht ausgerechnet werden mussten:

$$\overline{b} = \frac{13}{9}, \quad \overline{d} = \frac{4}{9}$$

$$\sqrt{\sum (b_i - \overline{b})^2} = \sqrt{\sum (d_i - \overline{d})^2} = \sqrt{\tfrac{20}{9}} \approx 1{,}4907$$

$$\sum (a_i - \overline{a})(b_i - \overline{b}) = \sum (a_i - \overline{a})(d_i - \overline{d}) = \tfrac{40}{9} \approx 4{,}444$$

$$r_{ab} = r_{ad} = \frac{4{,}444}{2{,}9814 \cdot 1{,}4907} = 1{,}0 \ .)$$