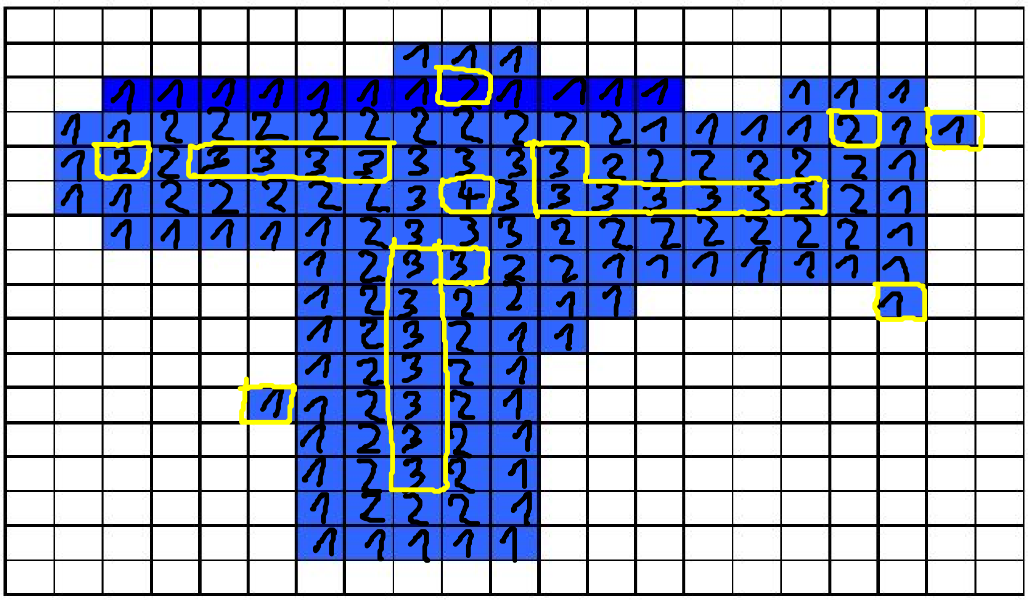
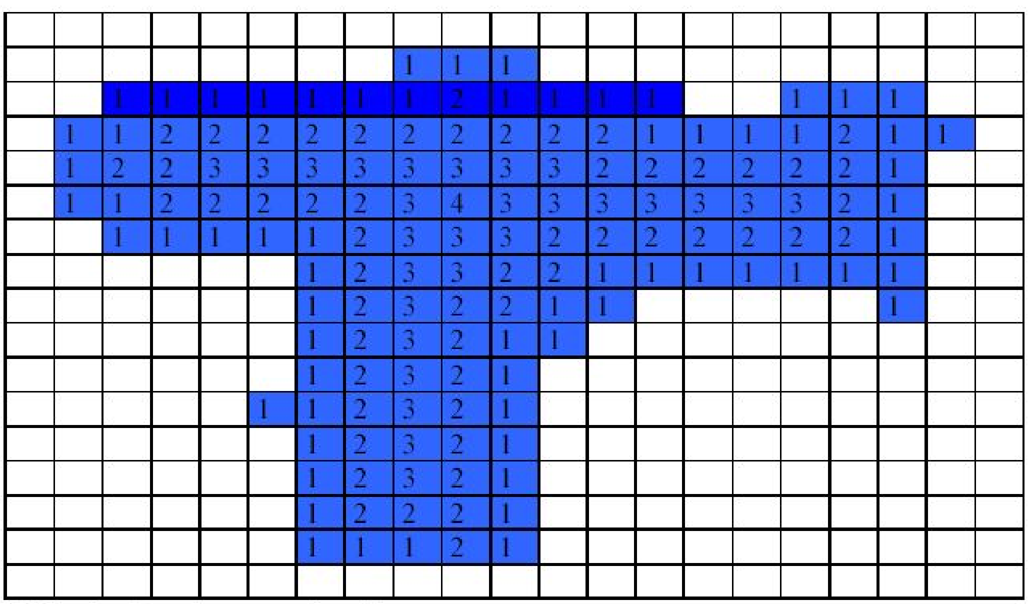
Bildanalyse und Bildverstehen
Lösung Aufgabe U19

1. Verfahren
d = 1;
iteriere:
markiere alle Objektpunkte am Rand (bzgl. 8-Nachbarschaft)
mit d;
lösche diese Punkte aus dem Objekt;
d++;
bis keine Objektpunkte mehr übrig sind; Mittelachsenpunkte = Punkte mit d>0, in deren 8-Nachbarschaft
keine Punkte mit höherem d-Wert liegen.





(Skelett : eingerahmt)

Vorteile : - einfaches Verfahren
- benutzt unmittelbar Def .der Distanz im Gitter.

Nachteile: - Skelett unzusammenhängend
- isolierte Teile des Skeletts ganz außen

2. Verfahren

Algorithmus:

Für jeden Punkt wird die 8-Nachbarschaft wie folgt durchnummeriert:

p_9	p_2	p_3
p_8	$\boxed{p_1}$	p_4
p_7	p_6	p_5

Es sei $Z(x)$ die Anzahl der (8-)Nachbarpunkte von x mit Grauwert 1.
$S(x)$ sei die Anzahl der $0\rightarrow1$-Übergänge in der gerichteten, zyklischen Pixelkette $p_2p_3 \ldots p_9p_2$.
Alle Objektpunkte werden in den folgenden Durchläufen untersucht.

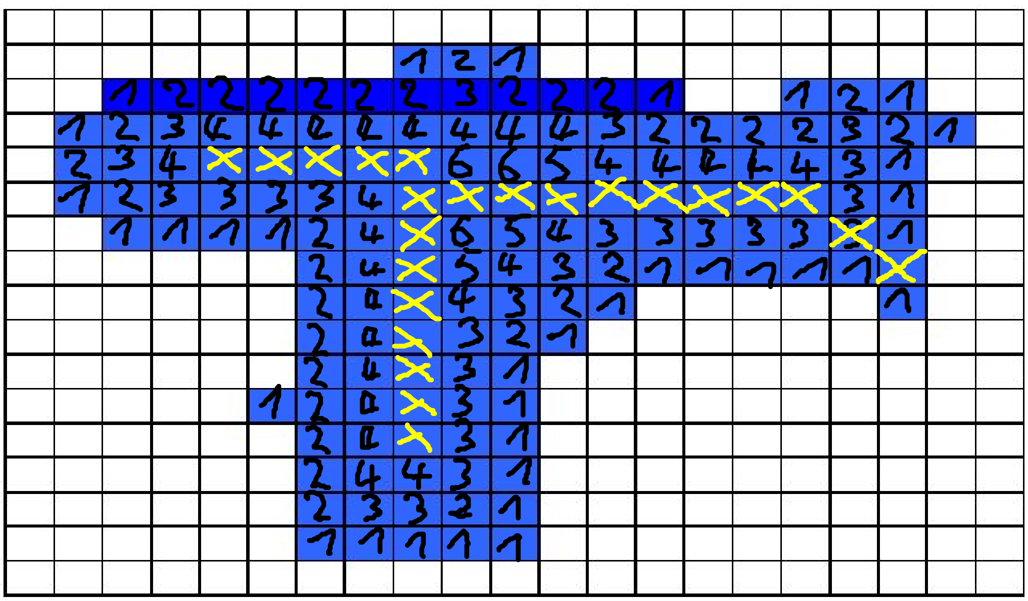
Durchlauf 1:

Ein Punkt wird markiert, wenn er die Bedingungen

(1) $2 \leq Z(p_1) \leq 6$
(2) $S(p_1) = 1$
(3) $p_2p_4p_6 = 0$
(4) $p_4p_6p_8 = 0$

erfüllt.

Nach dem Durchlauf werden alle markierten Punkte gelöscht (d.h. auf 0 gesetzt).



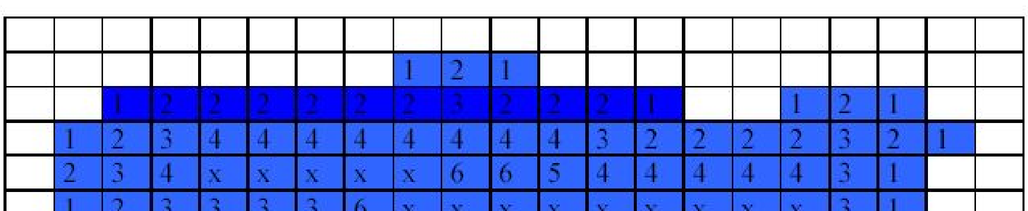
Durchlauf 2:

Ein Punkt wird markiert, wenn er die Bedingungen (1), (2),

(3') $p_6p_8p_2 = 0$
(4') $p_8p_2p_4 = 0$

erfüllt.

Nach dem Durchlauf werden alle markierten Punkte gelöscht.
Die Durchläufe 1 und 2 werden solange alternierend wiederholt, bis keine weiteren Punkte mehr gelöscht werden können.
Die übriggebliebenen Objektpunkte bilden das Skelett.

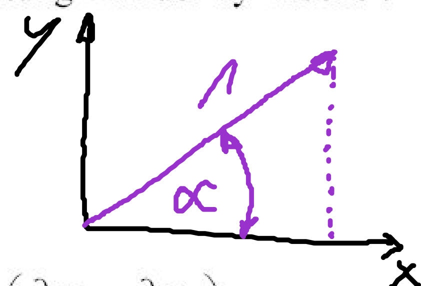


	1	2	3	3	3	3	6	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	1		
		1	1	1	1	2	4	x	6	5	1	3	3	3	3	3	4	1		
						2	4	x	6	4	3	2	1	1	1	1	1	x		
						2	4	x	4	3	2	1						1		
						2	4	x	3	2	1									
						2	4	x	3	1										
					1	2	4	x	3	1										
						2	4	x	3	1										
						2	4	4	3	1										
						2	3	3	2	1										
						1	1	1	1	1										

X = Skelett-Zellen
Nachteil : Verfahren aufwändiger als Verfahren 1, mehrere Schleifendurchläufe (Anzahl steht am Anfang noch nicht fest)
Vorteil : Skelett zusammenhängend;
Entspr. Eher der intuitiven Vorstellung von einem Skelett.

Lösung zu Aufgabe U20

(a) normalisierter Richtungsvektor $\vec{n}$ mit Richtung α in der xy- Ebene :



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung von $\vec{m}\, bzgl. \vec{n}$:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial \vec{n}} \\ \frac{\partial m_2}{\partial \vec{n}} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial m_m}{\partial \vec{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_2}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \cos\alpha \cdot \frac{\partial m_m}{\partial x} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial m_m}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \frac{\partial m_m}{\partial x} & \frac{\partial m_m}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = J \cdot \vec{n}$$

Jacobimatrix

Funktionalmatrix von $\vec{m}(x,y)$

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = \left\| J \cdot \vec{n} \right\|^2 = \left\langle J \cdot \vec{n},\ J \cdot \vec{n} \right\rangle = \left(J \cdot \vec{n} \right)^T \cdot \left(J \cdot \vec{n} \right) = \vec{n}^T\ J^T J . \vec{n} = \vec{n}^T\ M . \vec{n}$$

$$\text{mit } M = J^T J = \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{2x} & .....m_{mx} \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ . & . \\ . & . \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum^{m} m_{ix}^2 & \sum m_{ix} m_{iy} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } M = J^T . J = \begin{pmatrix} \ldots \\ m_{1y} & m_{2y} & \ldots . m_{my} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ldots \\ . & . \\ m_{mx} & m_{my} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \sum m_{ix} m_{iy} & \sum m_{iy}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = (\cos\alpha \quad \sin\alpha) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$f(\alpha) := \left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\| = \vec{n}^T \cdot M \cdot \vec{n}$$

Extremmalproblem unter Nebenbedingung $\left\| \vec{n} \right\|^2 = \vec{n}^T \cdot \vec{n} = 1$,äquivalent zu

Extremmalproblem . ohne NB:

$R\left(\vec{x}\right) := \dfrac{\vec{x}^T \; M \cdot \vec{x}}{\vec{x}^T \; \vec{x} \cdot}$ -> Max (wegen $R\left(\vec{x}\right)$= R(c$\vec{x}$) für c!=0)

R$\left(\vec{x}\right)$ heißt Rayleigh-Quotient.

Aus der Lin.Algebra : Die Extremwerte von R sind die Eigenwerte von M, die Eigenvektoren von M lösen die Extremwertaufgabe.
Eigenwerte(Ew) von M:

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = (A-\lambda)(C-\lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}$$

(b) Zahlenbeisp:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ \frac{\partial m_3}{\partial x} & \frac{\partial m_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M=$\begin{pmatrix} 2y & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y^2 & 4xy \\ 4xy & 4x^2 \end{pmatrix}$ an der Stelle $x_0 = 1, y_0 = 2 : M = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

Ew : $\lambda_{1,2} = \frac{20}{2} \pm \sqrt{(\frac{12}{2})^2 + 64} = 10 \pm \sqrt{100} = 10 \pm 10$ $\quad 0 = (M - \lambda I)\vec{x}_1$

$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 0$

Eigenvektoren : zu $\lambda_2 : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in KernM : \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Zu\ \lambda_1 : muss \perp zu \begin{pmatrix} -1 \\ \ldots \end{pmatrix} sein\ also \begin{pmatrix} 2 \\ \ldots \end{pmatrix} probe : \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ \ldots \end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \ldots \end{pmatrix}$

Zu λ_1 : $muss \perp zu \begin{pmatrix} \dots \\ 2 \end{pmatrix} sein, also \begin{pmatrix} \dots \\ 1 \end{pmatrix}. probe: \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 20 \end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ 1 \end{pmatrix}$

Normiert : $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad (\alpha_1 = \arctan 2)$

$\|\vec{n}\|^2 = (2,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$= 4 + 1 = 5$

$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad (\alpha_2 = \arctan(-1/2))$

Wo ist Max. der Richtungsabl. ? =bei $\vec{n}_1$ (Wert 20)
Probe :

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}_1} \right\|^2 = 16\cos^2\alpha_1 + 2 \cdot 8 \cdot \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 + 4\sin^2\alpha_1 = \frac{100}{5} = 20$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}_2} \right\|^2 = 0$$