Bildanalyse und Bildverstehen

Lösung zu Aufgabe U12

Zu zeigen $E_B = CD_BC$

Anwendung der Definition : $D_B(X) = \bigcup_{b\in B} X_{-b}$

$$E_B(X) = \bigcap_{b\in B} X_{-b}$$

$CD_BC(X) = C\left(\bigcup_{b\in B}(CX_{-b})\right)$

$= \bigcap_{b\in B} C(CX)_{-b}$ (Komplement einer Vereinigungsmenge ist Durchschnitt der Komplemente)

$= \bigcap_{b\in B} CC(X)_{-b} = \bigcap_{b\in B}(X)_{-b} = E_B(X)$

Lösung zu Aufgabe U13

Zu zeigen : Die Öffnungsoperation O_B für Binarbilder ist monoton und anti-extensiv

(a) Zunächst : Monotonie der Dilatation

z.z. : $X \subseteq Y \Rightarrow D_B(X) \subseteq D_B(Y)$

Nachweis :

$D_B(X) = \{x \mid \exists b \in B; x + b \in X\}$

$$x + b \in X \subseteq Y \Rightarrow x + b \in Y$$

$x \in D_B(X) \Rightarrow x \in D_B(Y)$

also $D_B(X) \Rightarrow D_B(Y)$

E = CDC(Aufgabe U12) , C ist antiton

$(X \subseteq Y \Rightarrow CX \geq CY)$

⇨mit D ist auch E monoton

OB = $D_{-B}E_B$ sonst ebenfalls monoton

(b) OB „anti-extensiv“ heißt = $X \supseteq O_B(X)$

z.z.: $x \in O_B(X) \Rightarrow x \in X$

Nachweis:

$$x \in O_B(X) \Leftrightarrow x \in D_{-B}(E_B(x))$$
$$\Leftrightarrow \exists b \in -B : x + b \in E_B(X)$$
$$\Leftrightarrow \exists b \in B : x - b \in E_B(X)$$
$$\Leftrightarrow \exists b \in B\ \forall \mathrm{c} \in \mathrm{B} : (x-b)+c \in X$$
$$\Leftrightarrow \exists b \in B\ \forall \mathrm{c} \in \mathrm{B} : x + (c-b) \in X$$

Wähle nun speziell c = b :

=> $\exists b \in B : x + (b-b) = x \in X$

Lösung zu Aufgabe U14(Grauumlometrie)

$O_{a \cdot B}$ monoton und anti-extensiv ,klar nach Aufgabe U13.

Nach zu zeigen : Absorptionseigenschaft

$$\forall a,b \geq 0 : g_a g_b = g_b g_a = g_{\max(a,b)}, \overset{mit}{(g_x = O_{x \cdot B})}$$

Sei o.B.d.A a≥b . z.z.: (1) $O_{a \bullet B} O_{b \bullet B} = O_{a \bullet B}$

und: (2) $O_{b \bullet B} O_{a \bullet B} = O_{a \bullet B}$

zunächst der Fall b=0 :

$$D_{\{0\}}(X) = \bigcup_{b \in \{0\}} X_{-b} = X_0 = X$$

$$E_{\{0\}}(X) = \bigcap ... = X_0 = X$$

also $D_{\{0\}} = E_{\{0\}} = O_{\{0\}}$ =I (identische Abb.)

$O_{a \bullet B} O_{o \bullet B} = O_{a \bullet B} I = O_{a \bullet B}$, ebenso für (2).

Sei jetzt b>0

$a \geq b > 0$, es ist $0 \leq \frac{b}{a} \leq 1$ und $0 \leq 1 - \frac{b}{a} < 1$

Sei k>0 ,wir charakterisieren die Elemente von

$O_{k-B}(x)$: vgl .U13(b).Beweis

$$X \in O_{k \bullet B}(X) \Leftrightarrow \exists c \in k \bullet B \;\; \forall d \in k \bullet B : x + (d - c) \in X$$

$$\Leftrightarrow \exists \tfrac{c}{k} \in B \;\; \forall \tfrac{d}{k} \in B : x + (d - c) \in X$$

$$\Leftrightarrow \exists e \in B \;\; \forall f \in B : x + k(f - e) \in X$$

(1) (i) z.z.: $O_{a \bullet B} O_{b \bullet B} \subseteq O_{a \bullet B}$

$$\mathrm{x} \in O_{a \bullet B}(O_{b \bullet B}(x)) \Leftrightarrow$$

$$\exists e \in B \, \forall f \in B \, \exists c \in B \forall \mathrm{d} \in \mathrm{B} : \mathrm{x} + \mathrm{a(f - a)} + \mathrm{b(d - c)} \in \mathrm{X} \quad (*)$$

Setze speziell d=c :

$$(*) \quad \Rightarrow X + a(f - e) \in X \Rightarrow \mathrm{x} \in O_{a-B}(X)$$

(ii) z.z.: $O_{a \bullet B} O_{b \bullet B} \supseteq O_{a \bullet B}$

$$\mathrm{x} \in O_{a \bullet B}(x) \Leftrightarrow \exists e \in B \, \forall \mathrm{f} \in \mathrm{B} : \mathrm{x} + \mathrm{a(f - e)} \in \mathrm{X} \;\; (\#)$$

z.z: $\forall \mathrm{f} \in \mathrm{B} \, \exists \mathrm{c} \in \mathrm{B} \, \forall \mathrm{d} \in: \mathrm{B} : \mathrm{x} + \mathrm{a(f - e)} + \mathrm{b(d - c)} \in \mathrm{X}$

wähle c:=f:

x+a(f-e)+b(d-f) = x+a($1 \cdot f - \frac{b}{a} f + \frac{b}{a} d - e$)

= x+a[(1- $\frac{b}{a}$)$f + \frac{b}{a} d - e$)

Konvexkombination von f und d !

f,d∈ B $\Rightarrow f' \in B$, da B konvex

x+a(f' - e) $\in X$, wegen (#)

(2) geht analog.

Lösung zu Aufgabe U15

aB Liniensegment der Länge a

1D – Binärbild : 0111100111100010011111

$O_{1\bullet B} = I$ P(1)=4 Zusammenhangskomponenten,

A(g1,X) = 14 (Fläche = Zahl der 1-pixel),

$O_{2\bullet B} = D_{-2\bullet B} E_{2\bullet B}$, $2\bullet B =$ | | * | $-2\bullet B =$ | * | |

	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
E2B	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
O2B	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

⇨ p(2)=3 , A($g_2 X$) = 13 , ΔA = +1

3B:

	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
E_{3B}	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
O_{3B}	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

⇨ p(3)=3 , A($g_3 X$) = 13 , ΔA = 0

4B:

	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
E_{4B}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
O_{4B}	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

⇨ p(4)=3 , A($g_4 X$) = 13 , ΔA = 0

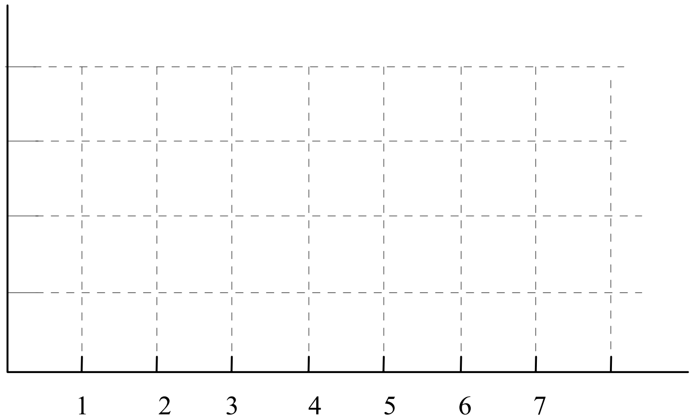
5B:

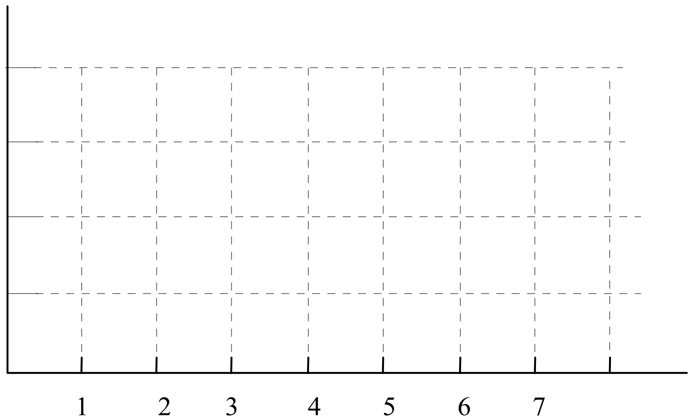
	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
E_{5B}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
O_{5B}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

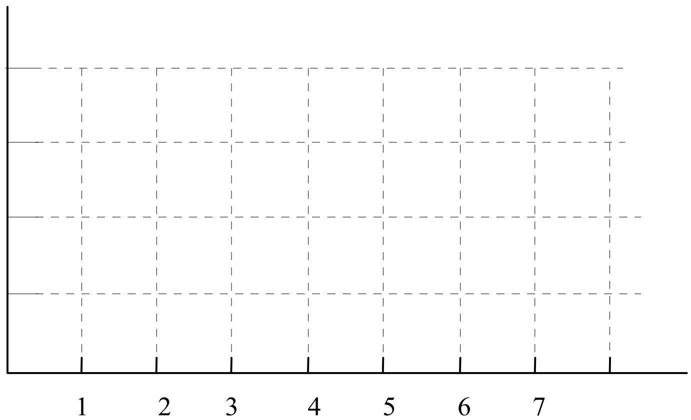
⇨ p(5)=1 , A($g_5 X$) = 5 , ΔA = 8

O6B : alles Nullen

$\Rightarrow$ p(6)=1 , $A(g_6 X) = 0, \Delta A = 5$







<u>Lösung zu Aufgabe U16:</u>

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 2.75 & -1.75 & 0.5 & -0.5 \\ 5.5 & -2.5 & -2.5 & 0 \\ -2.25 & 1.25 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.125 & -2.125 & -1 & -0.25 \\ -1.375 & 0.375 & 1.5 & -0.25 \\ -2.25 & 1.25 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 & 0 \end{Bmatrix}$$