Bildanalyse und Bildverstehen

Aufgabe U9

Gegeben sei die eindimensionale Faltungsmaske

$$F = \left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\}$$

(a) Man zeige: Es gibt keine faltungsinverse Maske G der Länge 7, für die also $F*G = I$ = (0 0 0 0 1 0 0 0 0) (= Einheitsfilter) erfüllt ist.

(b) Man bestimme eine Faltungsmaske F^+ der Länge 7, die die Summe der Abweichungsquadrate zwischen $F* F^+$ und I minimiert ("Pseudoinverse zu F").

Lösung zu Aufgabe U9

(a) Annahme : G faltungsinverse Maske der Länge 7 zu $F = \left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\}$ sei $G=(g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$.

Es soll gelten :

$$\left\{\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\right\} * \left\{g_0\ g_1\ \cdots\ g_6\right\} = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{4} \bullet g_0 = 0$$

$$\tfrac{1}{2} \bullet g_0 + \tfrac{1}{4} \bullet g_1 = 0$$

$$\tfrac{1}{4} \bullet g_0 + \tfrac{1}{2} \bullet g_1 + \tfrac{1}{4} \bullet g_2 = 0$$

....

usw.,

in Matrixschreibweise :

$$\underbrace{\frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}}_{A} \bullet \begin{Bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem (LGS)

$$A_{erw} \left\{ A \left| \begin{matrix} rechter \\ seite \end{matrix} \right. \right\}$$

LGS lösbar $\Leftrightarrow Rang(A) = Rang(A_{erw})$

LGS Lösbar $\Leftrightarrow Rang(A) = Rang(A_{erw})$

elementare Zeilenoperationen verändern dem Rang nicht.

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0&0&0\\1&2&1&0&0&0&0&0\\0&1&2&1&0&0&0&0\\0&0&1&2&1&0&0&1\\0&0&0&1&2&1&0&0\\0&0&0&0&1&2&1&0\\0&0&0&0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&4\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow Rang(A)$ $\quad$ $\mathrm{Rang}(A_{erw})$!

⇨ *LGS nicht Lösbar.(die gilt auch für andere Länge von G)*

F+ - Falungsmatrix der Länge 7,die die Summe der Abweichungsquadrate zwischen F*F+ und I (Einheitsmatrix) minimiert

F^+ der Läng 7 die die Summe der Abweichungsqu. zwischen $F * F^+$ und I minimiert.

F^+ symmetrisch

Ansatz: $F^+ = [g_0 \dots g_6] = (d\,c\,b\,a\,b\,c\,d)$

$$(*) \quad \begin{pmatrix} d \\ 2d+c \\ d+2c+b \\ c+2b+a \\ 2b+2a \\ a+2b+c \\ b+2c+d \\ c+2d \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\4\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$

Abweichungsquadr. zw. rechter

Summe der Abweichungsquadr.: zw. Werten mit linker Seite

$$S(a,b,c,d) = 2d^2 + 2(2d+c)^2 + 2(d+2c+b)^2 + 2(c+2b+a)^2 + (2a+2b-4)^2$$

$$= 6a^2 + 16ab + 4ac - 16a + 14b^2 + 16bc + 4bd - 16b + 12c^2 + 16cd + 12d^2 + 16$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a} &= 12a + 16b + 4c - 16 \\
\frac{\partial S}{\partial b} &= 16a + 28b + 16c + 4d - 16 \\
\frac{\partial S}{\partial c} &= 4a + 16b + 24c + 16d \\
\frac{\partial S}{\partial d} &= 4b + 16c + 24d
\end{aligned}\right\} \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung dieses LGS mit Gaußschem Eliminationsverfahren

1	4	6	4	0
0	-8	-17	-12	4
0	-9	-20	-15	4
0	1	4	6	0
1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	15	36	4
0	0	16	39	4
1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	1	12/5	4/15
0	0	16	39	4
1	4	6	4	0
0	1	4	6	0
0	0	1	22/5	4/15
0	0	0	3/5	-4/15
0	0	0	1	-4/9 => (d= - 4/9)
1	4	6	0	16/9
0	1	4	0	8/3
0	0	1	0	4/15+12/5*4/9=4/3 =>(c=4/3)
0	1	0	1	-4/9
1	4	0	0	16/9-24/3 = -56/9
0	1	0	0	8/3-16/3= -8/3 =>(b= -8/3)
0	0	1	0	4/3
0	1	0	1	-4/9
1	0	0	0	-56/9+ 32/3 =40/9 =>(a=40/9)
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	1	

⇨ $(a,b,c,d) = (\frac{40}{9}; -\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{4}{9}) = \frac{1}{9}(40; -24; 12; -4)$

also

$F^{+} = \frac{1}{9}(-4;\ 12;\ -24;\ 40;\ -24;\ 12;\ -4)$

$F * F^{+} = \frac{1}{9}(-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ 8;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1)$

$(\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}) * \frac{1}{9}[-4, 12, -24, 40, -24, 12, -4]$

$= [-0{,}11, 0{,}11, -0{,}11\ 0{,}11, 0{,}89, 0{,}11$

−0,11 0,11 −0,11

Aufgabe U10

Die folgende pgm-Datei definiert einen "Graukeil":

P2
6 6 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

Man wende hierauf die folgenden Faltungsmasken an
(zentriert auf die Mitte der Maske, Matrixeinträge jenseits des Randes als 0 angenommen):

(a) Die beiden Komponenten des Sobel-Operators:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(b) die Laplace-Maske

$$h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Man approximiere mittels (a) Betrag und Richtung des Gradienten in jedem inneren Bildpunkt.

Lösung zu Aufgabe U10

(a) Anwendung der Sobel-Masken:

h_1:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -8 & -12 & -16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

h_2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\
4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\
4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\
4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\
3 & 6 & 6 & 6 & 6 & -12
\end{bmatrix}
$$

(b)Anwendung der Laplace-Maske h_L:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\
1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11
\end{bmatrix}
$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ wird durch $\frac{1}{8} h_2$ approx.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{1}{8} h_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1,0) \Rightarrow$$ in x-Richtung steig
in y Richtung konst

$$|\operatorname{grad} f| = 1$$

$$= \arctan\left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$\arg(\operatorname{grad} f)$

$= \arctan 0 = 0$

$\Rightarrow$ Richtung x-Achse