Lösung zu Aufgabe U5

(a) zu zeigen; $K*B = B*K$

sei $K*B = A$, mit $a_{jk} = \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet b_{j-m,k-n}$;

sei $B*K = A' = (a'_{jk})$ $a'_{jk} = \sum_p \sum_q b_{p,q} \bullet k_{j-p,k-q}$

Substituiere j-p = m, k-q=n:

$$a'_{jk} = \sum_m \sum_n b_{j-m,k-n} \bullet b_{m,n}$$

Summationsgrenzen:
$p=0,\ldots,j$ (für $p>j$ wird Index bei k negativ)

$\Rightarrow$ $m= j-0, j-1,\ldots, 0$ bzw. (umgekehrt) $m=0,\ldots,j$
analog für q,n

$\Rightarrow$ $a'_{jk} = a_{jk}$

(b) z.z.: $K*(B+C) = K*B + K*C$

(Wegen (a) gilt dann auch
$(K+L)*B = K*B+L*B$)

Sei $A=(a_{ik}) = K*(B+C)$:

$$a_{jk} = \sum_n \sum_m K_{mn} \cdot (b_{j-m,k-n}+c_{j-m,k-n})$$

$$= \sum\sum K_{mn} b_{j-m,k-n} + \sum\sum K_{mn} c_{j-m\,k-n}$$

$$= a'_{jk}$$

$$= a'_{jk}$$

$$(a'_{jk}) = K*B + K*C$$

(b) z.z.: $K*(B+C) = K*B + K*C$

(Wegen (a) gilt dann auch: $(K+L)*B = K*B+L*B$.)

Sei $A=(a_{jk}) = K*(B+C)$

$$a_{jk} = \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet (b_{j-m,k-n} + c_{j-m,k-n})$$

$$= \sum_m \sum_n k_{m,n} \bullet b_{j-m,k-n} + \sum_m \sum_n k_{m,n} c_{j-m,k-n}$$

$$= a'_{jk}$$

Lösung zu Aufgabe U6:
(a)

$$K = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & & & & & & \end{bmatrix}$$

zu (b)

⋮ ⋮

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\
 & & & \vdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\
\cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\
\cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\
 & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ hohe Frequenzen werden nicht in allen Fällen ausgelöscht, Mittelwertfilter als Tiefpassfilter nicht uneingeschränkt geeignet

Lösung zu Aufgabe U7:

$$K*B-K*B_0 = K*(B-B_0) = K*R \text{ , sei } (a_{jk}) = K*R$$

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{2}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{9}\cdot 1\cdot r_{j-m,k-n} = \frac{1}{9}\sum\sum r_{j-m,k-n}$$

$$E(K*R) = \frac{1}{9}\sum\sum E(r_{j-m,k-n}) = \frac{1}{9}\cdot 0 = 0$$

Erwartungswert

Linear

$$Var(K*R) = E((K*R)^2) - E((K*R))^2 = E\Big(\frac{1}{9}\sum\sum r_{j-m,k-n}\Big)^2$$

r_{xy} und $r_{x'y'}$ stochast. unabh. für $(x',y') \neq (x,y)$

$$= \frac{1}{81}\sum\sum (E(r^2_{j-m,k-n})) = \frac{1}{81}\sigma^2$$

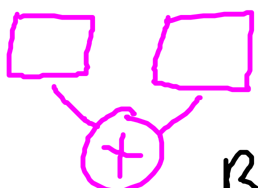
die Varianz des Rauschanteils wird durch den Filter um den Faktor 1/81 vermindert, der Erwartungswert von B bleibt erhalten.

$\Rightarrow$ “Glättungsfilter“ !

Lösung zu Aufgabe U8:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$,einfacher sind Binomialkoeffizienten aus dem

Pascalschen Dreieck zu entnehmen:



n=0

n=1

n=2

$\binom{n}{0}$ – 1

$\binom{n}{1}$ = 1 1

$B_1 = \frac{1}{2}[1 \ 1]$ $\binom{n}{2}$ – 1 2 1

$B_2 = \frac{1}{4}[1 \ 2 \ 1]$ 1 3 3 1

$B_3 = \frac{1}{8}[1331$ 1 4 6 4 1

2dim Form: $B_m^T \cdot B_n$

warum der Faktor $\frac{1}{2^n}$? $\rightarrow$ bewirkt Normierung auf Summe1, denn

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\2 & 6 & 6 & 2\\1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Anwendung auf die periodischen Muster :

a) b

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \vdots & & & \vdots & \\ \cdots & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \cdots & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \cdots \\ & \vdots & & & & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$