Aufgabe U4

(a) Wie lauten die Basismatrizen der diskreten Fouriertransformation im Falle $L = R = 2$, also für 2×2-Matrizen?
(b) Man zeige, dass diese 4 Matrizen tatsächlich eine Ortho-

Lösung zu Aufgabe U4

(a) DFT – Basismatrizen allg. $B_{m,n} = \left(e^{2\pi i*\left(\frac{mj}{L}+\frac{nk}{R}\right)}\right)$ j=0,...,L-1
k=0,...,R-1

$$B_{0,0} = \left(e^{2\pi i \bullet 0}\right) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$B_{0,1} = \left(e^{2\pi i \bullet (0 + k/2)}\right) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$B_{1,0} = \left(e^{2\pi i \bullet (0 + j/2)}\right) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$B_{1,0} = \left(e^{2\pi i \bullet (j + k)/2}\right) \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$\frac{5}{16} =$

(b) Lineare Unabhängigkeit :

$$a \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + d \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a+b+c+d=0 \\ a-b+c-d=0 \\ a+b-\ldots d=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a+b=0 \\ a-b=0 \\ c+d=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$a-b-c+d=0$ $c-d=0$

Wegen dim $\mathbb{C}^{2*2}=4$ müssen die $B_{m,n}$ dann eine Basis bilden

Orthonormal? nachprüfen:

35/16 2 2

63/16 4 4

$$\langle B_{0,0};B_{0,0}\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} B_{0,0}(j,h)\bullet\overline{B_{0,0}(j,h)} =$$

77/16 4 5 5

analog für die anderen $\langle B_{m,n};B_{m,n}\rangle$ 7

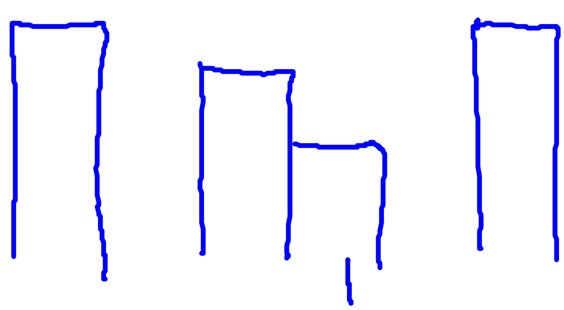
(c) DFT von $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

f g

$$g_{m,n} = \frac{1}{4}\bullet\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_{jk}\bullet e^{-2\pi i(\frac{j}{2}m+\frac{k}{2}n)} \quad ,(m=0;1\ n=0;1)$$

m = n = 0 :

5 2



(d) Vollständige Einebnung durch Ausgleich zwischen über – und unterbesetzten Klassen: (einfacher mit absoluten Häufigkeiten)

Häufigkeiten)

	0	1	2	3	4	5	6	7
Ist	0	0	5	0	4	2	0	5
Soll	2	2	2	2	2	2	2	2

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist nicht eindeutig (Wahl der zu Verändernden Pixel randomisiert.)

Beachte :

- Wenn man Schritt 3 anwendet , kann man sich die Schritte 1 und 2 sparen!
- Nachteil des letzten Schrittes : Homogene Bereiche des Bildes werden inhomogen!
- Deshalb beschränkt man sich oft auf die Schritte 1+2(Spreizung +Transformation mittels hc)

Aufgabe U4

(a) Wie lauten die Basismatrizen der diskreten Fouriertransformation im Falle $L = R = 2$, also für 2×2-Matrizen?
(b) Man zeige, dass diese 4 Matrizen tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden.
(c) Wie lautet die Fouriertransformierte der folgenden Matrix:

$$(f_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ ?$$

Lösung zu Aufgabe U4

(a)DFT – Basismatrizen allg. $B_{m,n} = \left(e^{2\pi i*(\frac{mj}{L}+\frac{nk}{R})}\right)$ $j=0,\dots,L-1$
$k=0,\dots,R-1$

$$B_{0,0} = \left(e^{2\pi i \bullet 0}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{0,1} = \left(e^{2\pi i \bullet (0 + k/2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

πi ... $\cos \pi$

$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi$

$$B_{1,0} = \left(e^{2\pi i \bullet (0 + j/2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{1,1} = \left(e^{2\pi i \bullet (j+k)/2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

(b) Lineare Unabhängigkeit :

$$a \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + d \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a+b+c+d=0 \\ a-b+c-d=0 \\ a+b-c-d=0 \\ a-b-c+d=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a+b=0 \\ a-b=0 \\ c+d=0 \\ c-d=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{matrix}$$

Wegen dim $\mathbb{C}^{2*2}$ =4 müssen die $B_{m,n}$ dann eine Basis bilden

Orthonormal? Zu prüfen:

$$\langle B_{0,0}; B_{0,0} \rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} B_{0,0}(j,h) \bullet \overline{B_{0,0}(j,h)} = (1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1)\cdot\frac{1}{4} = 1$$

analog für die anderen B_{jk}

analog für die anderen $\langle B_{m,n}; B_{m,n} \rangle$

$$\langle B_{0,0}; B_{0,1} \rangle = \frac{1}{4}\sum\sum B_{0,0}(j,h) \bullet \overline{B_{0,1}(j,h)} = \frac{1}{4}\left(1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (1\cdot 1) + 1\cdot(-1)\right) = 0$$

analog für die übrigen Kombinationen....

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) DFT von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$g_{m,n} = \frac{1}{4} \bullet \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} f_{jk} \bullet e^{-2\pi i(\frac{j}{2}m + \frac{k}{2}n)} \quad ,(m=0;1\ n=0;1)$$

$m = n = 0$: $e^{\cdots} = 1$

$$g_{00} = \frac{1}{4}(1+2+3+4)$$

$$= \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$e^{-\pi i}$

$m = 0,\ n = 1$:

$$g_{01} = \frac{1}{4}\left(1 \cdot 1 + 2(-1) + 3(1) + 4 \cdot (-1)\right) = -\frac{1}{2}$$

$$g_{10} = \frac{1}{4}\left(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4(-1)\right) = -1$$

$$g_{11} = \frac{1}{4}\left(1 \cdot 1 + 2(-1) + 3(-1) + 4(1)\right) = 0$$

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} 5/2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$