

8. Voronoi-Diagramme: Wie finde ich das nächste Postamt?

Motivation:

gegeben: Raum R , darin Menge S von Objekten

Frage nach Zerlegung von R in "Einflusszonen" der Objekte aus S

für jedes Objekt p aus S bilde Region aus denjenigen Punkten aus R , für die der von p ausgeübte Einfluss am größten (unter allen Objekten aus S) ist:

Voronoi-Region von p

Allgemeinheit: "Raum", "Objekt", "Einfluss" sind variabel

⇒ Ansatz wurde in verschiedenen Fachgebieten

"wiederentdeckt" (unter verschiedenen Namen)

Voronoi-Diagramm

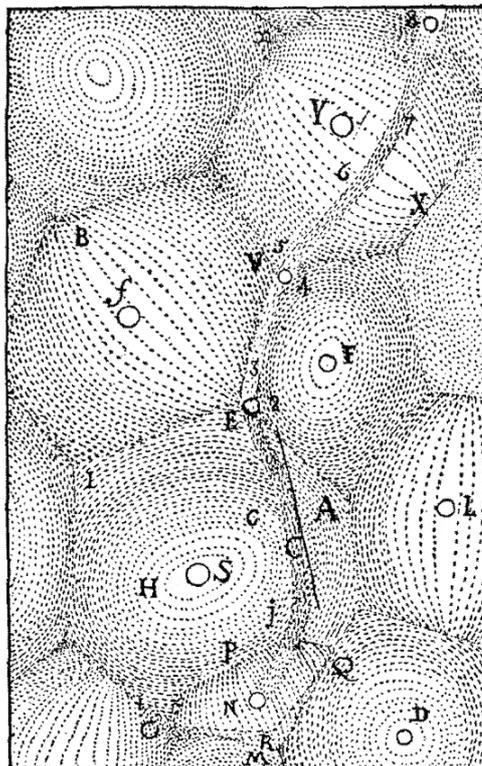
= *Dirichlet-Zerlegung*

= Zerlegung in *Thiessen-Polygone*

in der algorithmischen Geometrie: Shamos & Hoey 1975

früher Vorläufer:

Modellvorstellung kosmischer Materie-Wirbel bei Descartes 1644.



(aus Klein 1997)

Definition:

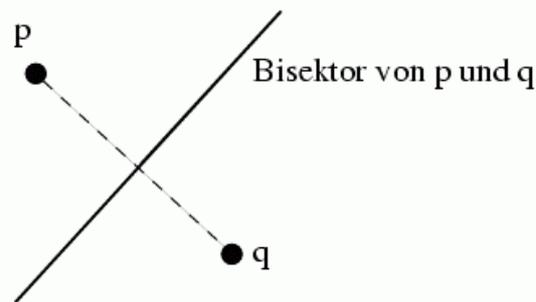
gegeben: Menge S von n Punkten p_1, \dots, p_n in der Ebene \mathbb{R}^2

verwendete Metrik: L_2 -Norm (euklidischer Abstand)

Bisektor zweier Punkte p, q :

$$B(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |\overline{px}| = |\overline{qx}|\}$$

(für Punkte p, q stets Mittelsenkrechte von \overline{pq})



zerlegt \mathbb{R}^2 in zwei Halbebenen:

$$D(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |\overline{px}| < |\overline{qx}|\}$$

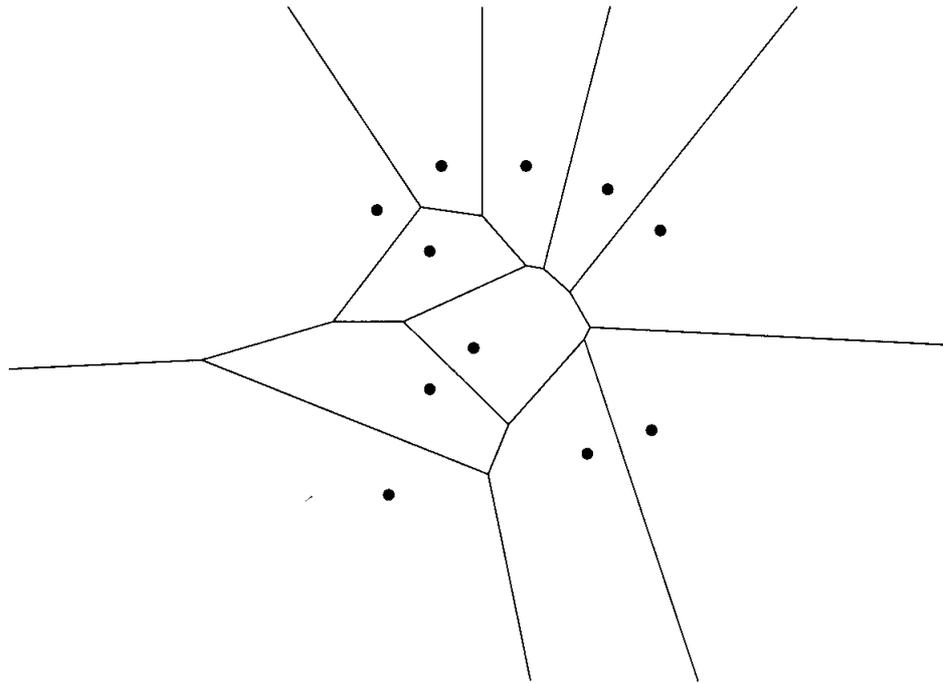
$$D(q, p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |\overline{px}| > |\overline{qx}|\}$$

Klar: $p \in D(p, q)$, $q \in D(q, p)$.

Voronoi-Region von p bezüglich S :

$$VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$$

- Durchschnitt von $n - 1$ offenen Halbebenen
- offen, konvex, aber nicht notwendig beschränkt
- Menge aller Punkte im \mathbb{R}^2 , zu denen p näher ist als irgendein anderer Punkt $q \in S$



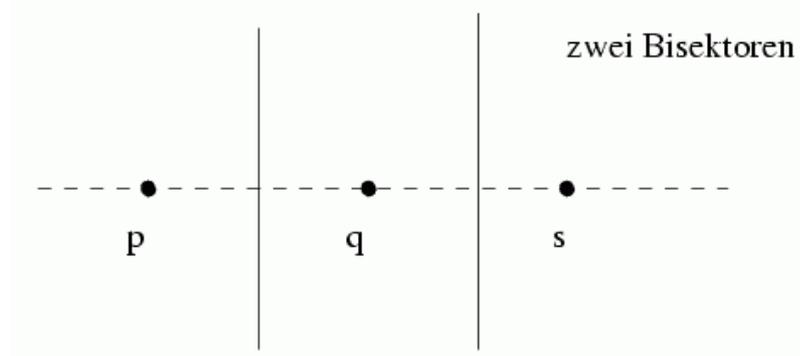
Voronoi-Knoten: Punkte v in \mathbb{R}^2 , die zu *mehr* als zwei Punkten aus S minimalen Abstand haben

Voronoi-Kante: gemeinsamer Rand zweier Voronoi-Regionen, falls aus mehr als einem Punkt bestehend (Endpunkte sind Voronoi-Knoten)

Voronoi-Diagramm $VD(S)$:

Graph aus Voronoi-Knoten und Voronoi-Kanten

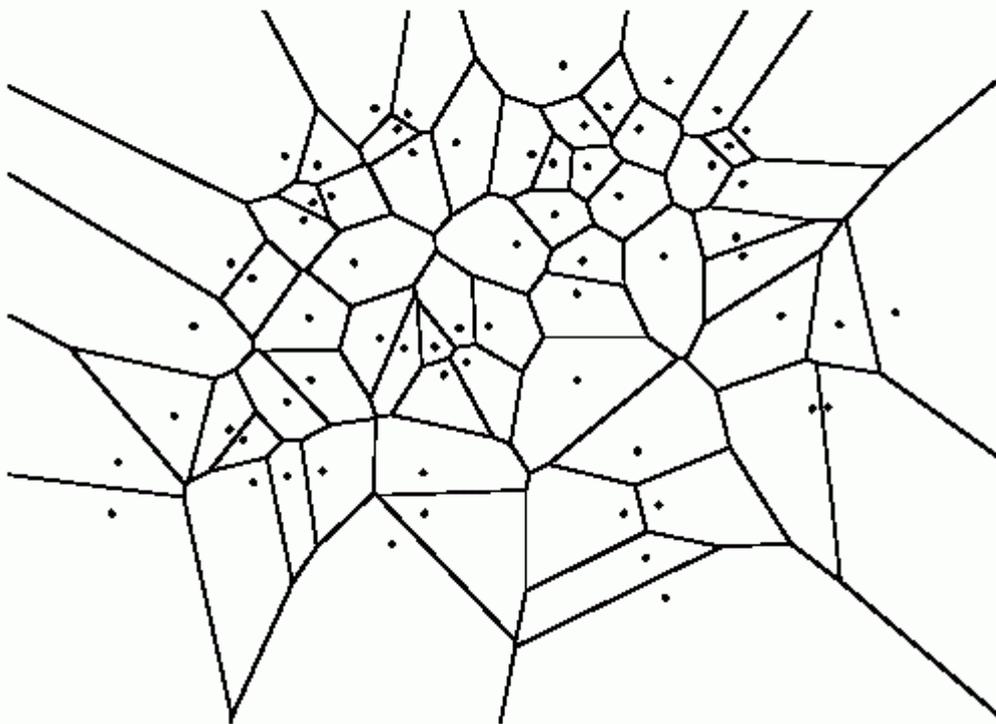
Das Voronoi-Diagramm ist im allgemeinen zusammenhängend
 – Ausnahme: Menge kollinearier Punkte, z.B.



Die Voronoi-Knoten haben im allgemeinen den Grad 3.
 Ausnahme: 4 der Punkte auf S liegen auf einem gemeinsamen Kreis \Rightarrow die zugehörigen VR treffen sich in einem gemeinsamen Knoten mit Grad ≥ 4 .

Voronoi-Diagramm löst Problem der "Einflusszonen" für Objekte = Punkte in der Ebene, Einfluss proportional zum euklidischen Abstand.

Beispiel: Einzugsbereiche der Schweizer Städte



(aus Hinrichs 2001)

Gedankenexperiment:

Betr. von bel. $x \in \mathbb{R}^2$ sich ausbreitenden Kreis $C(x)$ mit Zentrum x

Lemma:

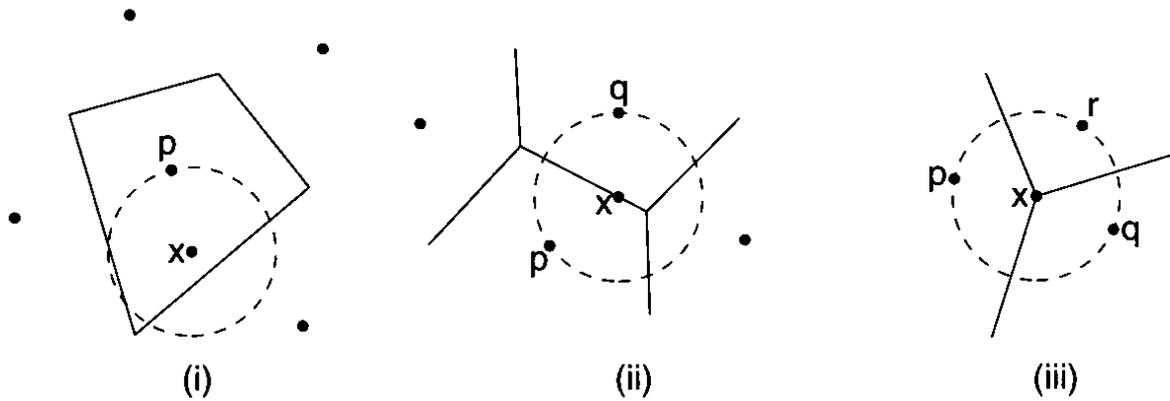
$C(x)$ trifft als ersten von S auf $p \Leftrightarrow x \in VR(p)$

$C(x)$ trifft als erste von S gleichzeitig p, q

$\Leftrightarrow x$ liegt auf der Voronoi-Kante zwischen $VR(p, S)$ und $VR(q, S)$

$C(x)$ trifft als erste von S gleichzeitig $p_1, p_2, \dots, p_k, k \geq 3$

$\Leftrightarrow x$ ist Voronoi-Knoten, an den die $VR(p_i, S)$ grenzen, $i = 1, \dots, k$.



Beweis: siehe Klein 1997, Keßler 1998.

wir betrachten zunächst Eigenschaften des Voronoi-Diagramms, effiziente Konstruktion später.

Zusammenhang zur konvexen Hülle:

Lemma: Ein Punkt $p \in S$ hat genau dann eine *unbeschränkte* Voronoi-Region $VR(p, S)$, wenn er auf dem Rand der konvexen Hülle $CH(S)$ liegt.

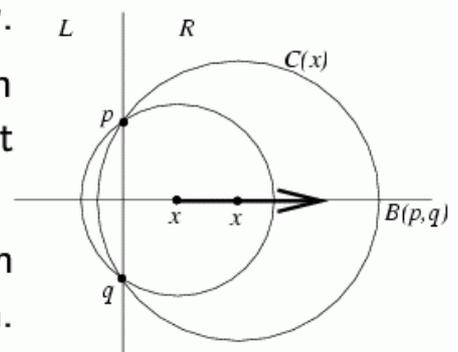
Beweis: " \Rightarrow ": sei $VR(p, S)$ unbeschränkt

$\rightarrow \exists q \in S, q \neq p$, so daß $VD(S)$ ein unbeschränktes Stück von $B(p, q)$ als Kante e enthält

Sei $x \in e$, sei $C(x)$ Kreis um x durch p und q .

Für $|x| \rightarrow \infty$ wird der in der Halbebene R liegende Teil von $C(x)$ größer und erreicht irgendwann jeden Punkt von R .

Läge ein $r \in S$ in R , würde $C(x)$ irgendwann r erreichen $\rightarrow x$ wäre Voronoi-Knoten, d.h. anderer Endpunkt von e , Widerspruch.



→ alle $r \in S \setminus \{p, q\}$ liegen in $L \Rightarrow \overline{pq} \subset \partial CH(S)$.

“ \Leftarrow ”: seien p, q benachbarte Ecken auf $\partial CH(S)$,

sei $S \setminus \{p, q\}$ ganz “links” der Geraden (Bild: Senkrechte) pq

→ $R \cap C(x)$ enthält für kein $x \in B(p, q)$ einen Punkt aus S (s.o.)

$L \cap C(x)$ enthält auch keine Punkte aus S

wenn x nur weit genug “rechts” liegt.

→ ein unbeschränktes Stück von $B(p, q)$ bildet Voronoi-Kante

→ $VR(p, S), VR(q, S)$ sind unbeschränkt

□

Folgerung: $CH(S)$ aus $VD(S)$ in Zeit $O(n)$ konstruierbar

Folgerung: Konstruktion von $VD(S)$ braucht Zeit $\Omega(n \log n)$

Satz: Für $|S| = n$ hat das Voronoidiagramm $O(n)$ Voronoi-knoten und $O(n)$ Voronoi-kanten.

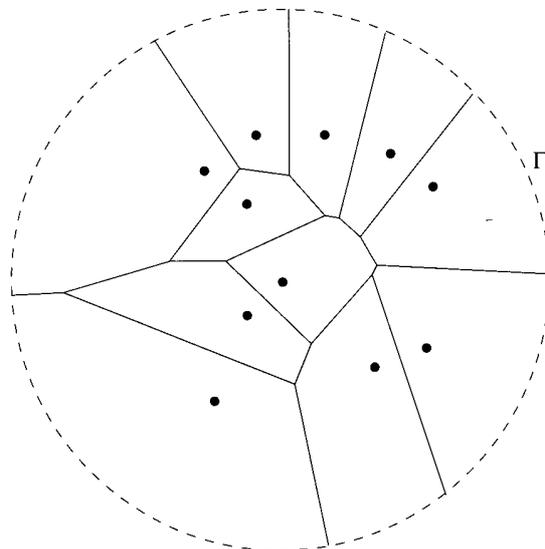
Beweis:

betr. beschränktes Voronoi-Diagramm $VD_0(S)$:

Hinzufügen eines einfachen geschlossenen Weges Γ um S ,

so daß Γ nur unbeschränkte Voronoi-kanten kreuzt

→ unbeschränkte Voronoi-Regionen werden durch Γ beschränkt



$VD_0(S)$ zusammenhängend

→ Eulerformel anwendbar: $N + F = E + 2$ (Induktion),

wobei # Flächen $F = n + 1$.

Knotengrad $\geq 3 \Rightarrow N \leq \frac{2}{3}E$

→ $N = O(n)$, $E = O(n)$

Anwendungen des Voronoi-Diagramms

Das Problem des nächsten Postamtes

gegeben: n Postämter als Punkte p_1, \dots, p_n in der Ebene

Preprocessing: berechne $VD(\{p_1, \dots, p_n\})$

Anfrage: zu bel. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bestimme p_i mit $x \in VR(p_i)$

(falls ex. i_1, i_2, \dots mit $x \in \cap_j \overline{VR(p_{i_j})}$, wähle i_j min.)

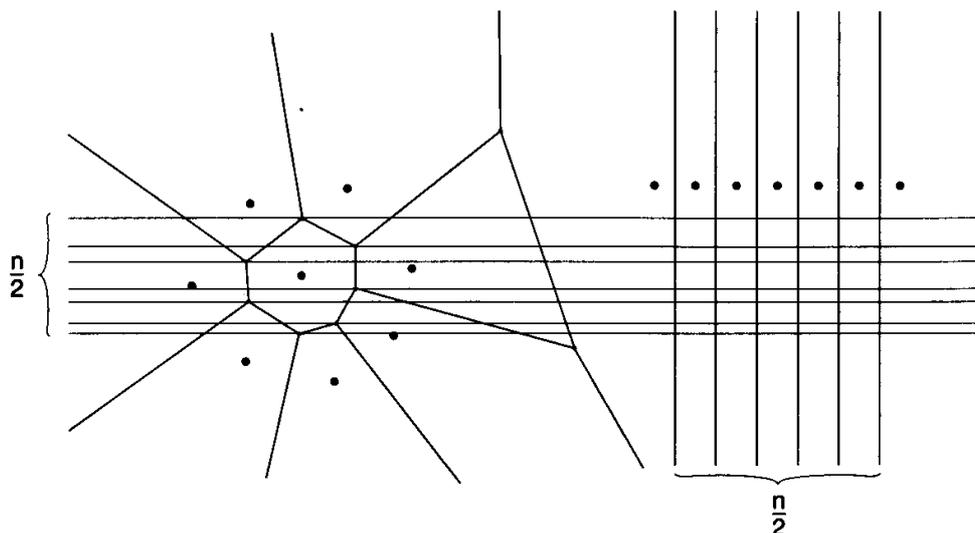
→ *point-location-Problem*

vgl. Kapitel 7

effiziente Bearbeitung der Anfrage mittels geeigneter Datenstruktur

1. Methode (wie in Kap. 7): Streifenmethode

aber auch hier gibt es (wie im allgemeinen Fall) die Möglichkeit, dass die Datenstruktur quadratisch viel Speicherplatz benötigt:



⇒ verwende z.B. Trapezoidzerlegung von $VD(S)$.

Bestimmung aller nächsten Nachbarn

Beobachtung: disjunkte Zerlegung $S = P \cup Q$, $P, Q \neq \emptyset$;
seien $p_0 \in P$, $q_0 \in Q$ so gewählt, daß $|\overline{p_0q_0}| = \min_{p \in P, q \in Q} |\overline{pq}|$
dann haben $VR(p_0, S)$ und $VR(q_0, S)$ eine gemeinsame Kante.

Beweis: Annahme: ex. $z \in \overline{p_0q_0}$ mit $z \in \overline{VR(r, S)}$ für ein $r \neq p_0, q_0$.

OBdA sei $r \in Q$. ($r \in P$ symmetrisch)

$$\begin{aligned} |\overline{p_0r}| &\leq |\overline{p_0z}| + |\overline{zr}| && \text{(wg. Dreiecksungleichung)} \\ &\leq |\overline{p_0z}| + |\overline{zq_0}| && \text{(weil } |\overline{rz}| \leq |\overline{q_0z}| \text{)} \\ &= |\overline{p_0q_0}| \leq |\overline{p_0r}| && \text{(wg. Minimalität von } \overline{p_0q_0} \text{)} \end{aligned}$$

Also überall Gleichheit, ibs. $|\overline{p_0r}| = |\overline{p_0q_0}|$ und $|\overline{zr}| = |\overline{zq_0}|$

Wegen $|\overline{p_0r}| = |\overline{p_0q_0}|$ wäre p_0 auf Bisektor $B(q_0, r)$

$\rightarrow z$ ganz in $D(q_0, r)$ enthalten $\rightarrow |\overline{zq_0}| < |\overline{zr}|$, Widerspruch. \square

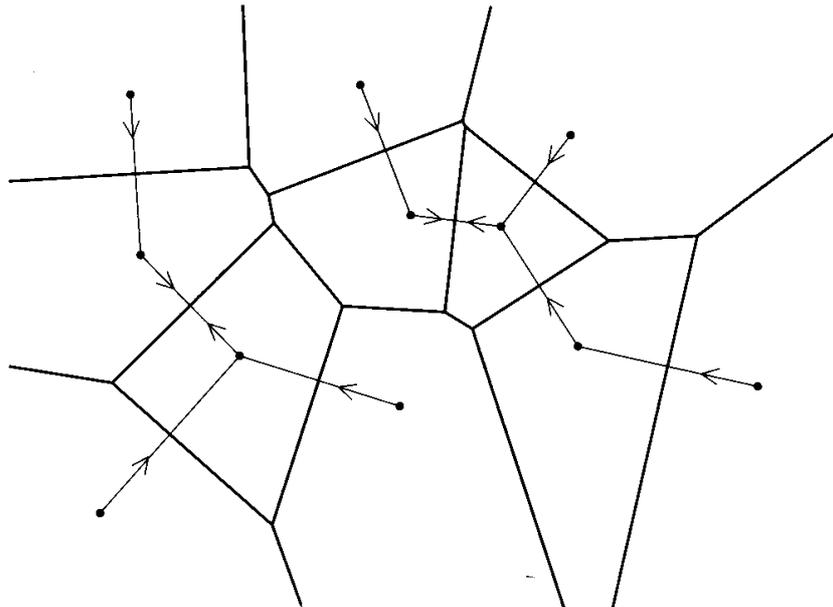
Anwendung auf $P = \{p\}$, $Q = S \setminus \{p\}$ für bel. $p \in S$:

Folgerung: Jeder nächste Nachbar von p in S sitzt in $VD(S)$ in einer Nachbarregion von $VR(p, S)$ (gemeinsame Kante).

Folgerung: Für alle $p \in S$ kann bei gegebenem $VD(S)$ ihr nächster Nachbar in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

Beweis: Besuch aller Nachbarn zu jedem $p \in S$ benutzt jede Voronoi-kante genau zweimal. \square

Folgerung: Bei gegebenem $VD(S)$ kann ein dichtestes Punktepaar in Zeit $O(n)$ berechnet werden.



der nächste Nachbar befindet sich immer
in einer benachbarten Voronoi-Region

Minimaler aufspannender Baum (*minimal spanning tree* = MST;
"minimaler Spannbaum")

Anwendung: z.B. Minimierung von Kabelnetzen zwischen
gegebenen Punkten in der Ebene

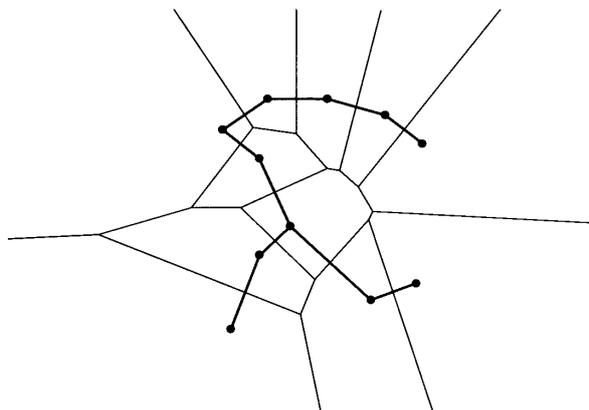
Minimaler Spannbaum (minimum spanning tree)

zu einer Menge S von n Orten

= zusammenhängender Graph,

Summe der Längen aller Kanten minimal

Beispiel (11 Punkte gegeben; MST und VD):



Algorithmus von Kruskal: berechnet MST für Graph

$G = (V, E, dist)$ mit Kantengewichten $dist$ in Zeit $O(|E| \log |E|)$:

halte Wald von Bäumen über disjunkten Teilmengen von V

starte mit einelementigen Bäumen $\forall v \in V$

für die Kanten $e \in E$ in aufst. Reihenfolge von $dist(e)$

falls e zwei Teilbäume T_1, T_2 verbindet:

entferne T_1, T_2 , füge $T = tree(T_1, T_2, e)$

sonst verpö e

naive Anwendung: $E = V \times V \Rightarrow$ Zeit $O(n^2 \log n)$

besser: betrachte nur die $O(n)$ vielen Kanten e , die direkte Voronoi-Nachbarn miteinander verbinden \Rightarrow Zeit $O(n \log n)$

(Ausnutzung des Zusammenhangs von nächsten Nachbarn und Nachbarschaft der VR)

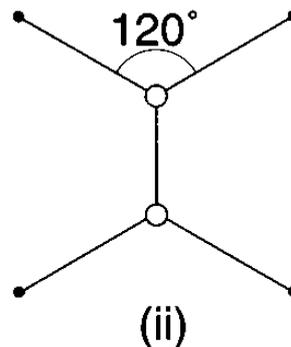
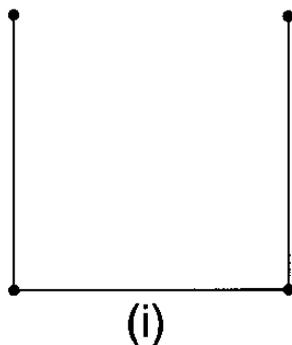
Bemerkung: es geht noch besser (Cheriton & Tarjan 1976): MST in Zeit $O(n)$, falls VD gegeben.

Bemerkung: Für Verkabelungsprobleme etc. ist MST oft nicht die optimale Lösung:

Einführung von Zwischenknoten (*Steinerpunkte*)

\rightarrow *Steinerbaum* (Länge max. Faktor $1/3$ kürzer als MST)

Berechnung minimaler Steinerbäume ist NP-vollständig



(i) MST, Länge 3; (ii) Steinerbaum, Länge $1 + \sqrt{3} = 2,732\dots$

Traveling-Salesman-Problem (TSP):

gegeben: n Punkte ("Städte") in der Ebene

gesucht: kürzester Rundweg, der alle Punkte einmal besucht

TSP ist NP-vollständig (vgl. Garey/Johnson'77)

Approximationslösung:

Ersetze im MST jede Kante $\{u, v\}$ durch zwei entgegengesetzt gerichtete Kanten $(u, v), (v, u) \rightarrow$ Rundweg



Satz: Der Rundweg um einen MST ist weniger als doppelt so lang wie ein optimaler Rundweg.

Beweis:

Sei t die Länge des MST.

Sei W ein optimaler Rundweg (Polygon mit n Ecken)

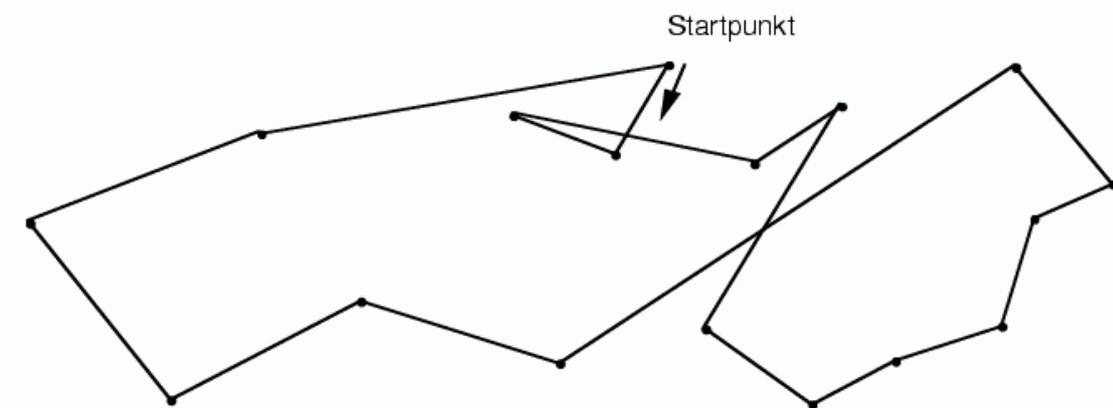
Sei W_{opt} Länge von W

Entfernen einer Kante aus W produziert einen Spannbaum T von S mit $\text{Länge}(T) < W_{opt}$

$\rightarrow t \leq \text{Länge}(T) < W_{opt}$

Rundweg um MST hat Länge $2t \rightarrow$ q.e.d. □

- Wunsch: Kein Punkt sollte 2-mal besucht werden.
- Heuristik zur Vermeidung von Mehrfachbesuchen:
 - Traversiere doppelten MST Pfad vom Startpunkt aus.
 - Wurde der nächste Punkt bereits besucht, so ignoriere diesen Punkt und suche den nächsten unbesuchten Punkt entlang des doppelten MST Pfades.



Der größte leere Kreis

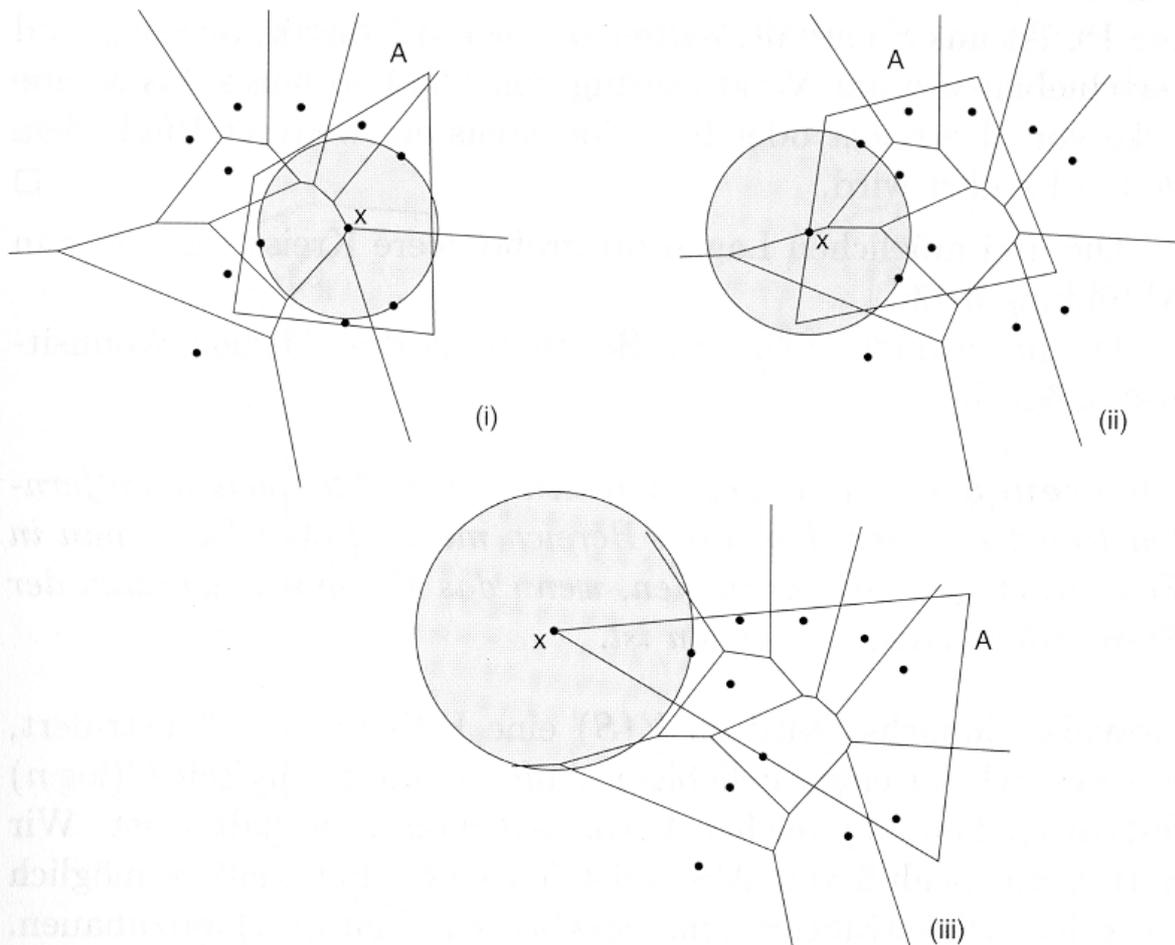
Gebiet A ist Polygon mit m Ecken (z.B. Bundesland)

Menge S von n Störquellen p_1, \dots, p_n (z.B. KKW)

gesucht: Punkt in A mit maximalem Abstand zu den Störquellen
d.h. maximaler leerer Kreis $C(x)$ mit Mittelpunkt x in A

Beobachtung: Dann ist x entweder

- (a) ein Voronoi-Knoten von $VD(S)$, oder
- (b) ein Schnittpunkt einer Voronoikante mit ∂A , oder
- (c) ein Eckpunkt von A .



Beweis: siehe Klein 1997, Keßler 1998

Es gilt darüberhinaus:

Satz: Falls $VD(S)$ gegeben, kann der am weitesten von den n Störquellen aus S entfernte Punkt $x \in A$ in Zeit $O(m \log n + n)$ berechnet werden.

Beweis: siehe Klein 1997, Keßler 1998

Die Delaunay-Triangulation

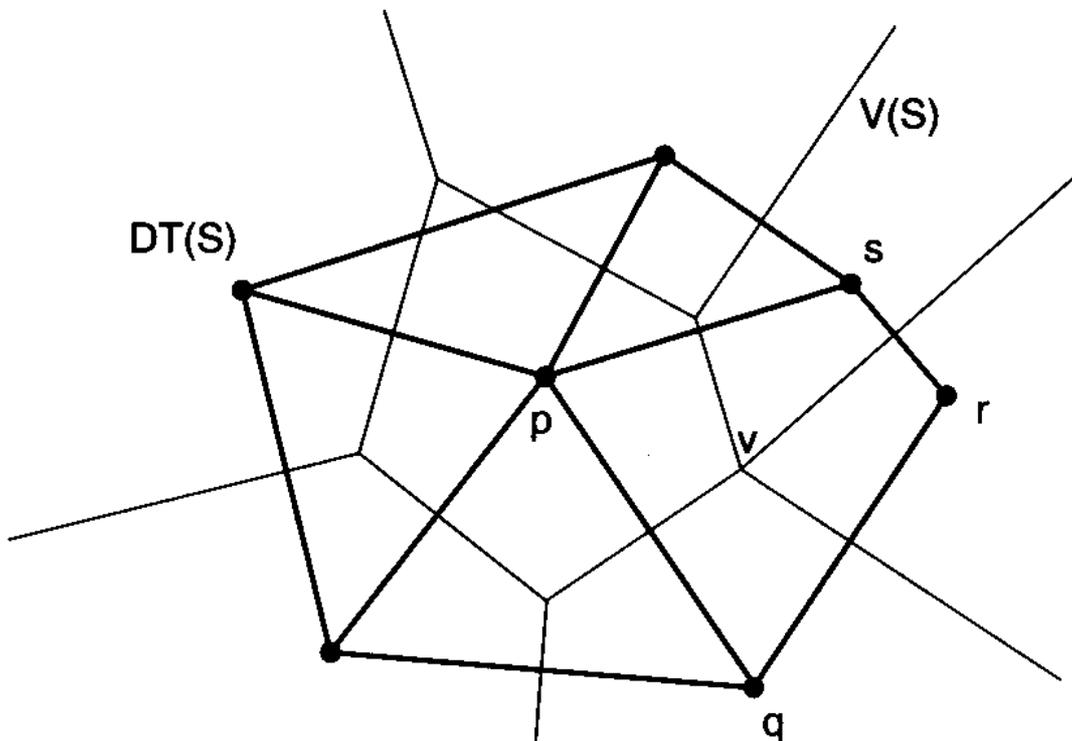
Dualer Graph $VD(S)^*$ eines Voronoi-Diagramms $VD(S)$:

Knoten = Voronoi-Regionen \equiv Punkte aus S

Kante $(p_i, p_j) \Leftrightarrow VR(p_i, S)$ und $VR(p_j, S)$ direkt benachbart

$VD(S)^*$ heißt *Delaunay-Zerlegung* $DT(S)$ von S

Kanten $\overline{p_i p_j}$ von $DT(S)$ heißen *Delaunay-Kanten*



7 Punkte in der Ebene, ihr Voronoi-Diagramm (dünn gezeichnet) und ihre Delaunay-Zerlegung (aus Klein 1997)

Delaunay-Zerlegung lässt sich in Zeit $O(n)$ aus dem VD berechnen und umgekehrt.

Beobachtung:

(p, q) Delaunay-Kante \Leftrightarrow ex. Kreis C , mit $p, q \in \partial C$, $S \cap C = \emptyset$

Beweis: n. Def. ist (p, q) Delaunay-Kante g.d.w. ex. Kante e in $VD(S)$, $e = \partial VR(p, S) \cap \partial VR(q, S)$.

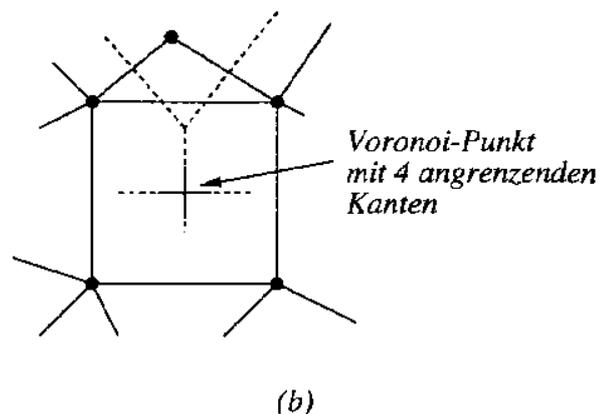
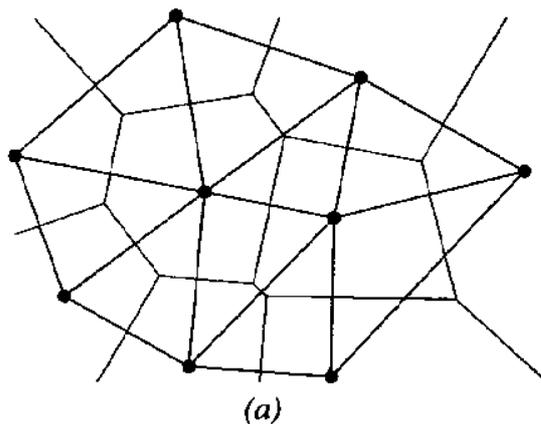
Für alle x im Innern von e sind p, q die beiden nächstgelegenen Orte in S .

\rightarrow Kreis $\overline{C(x)}$ um x durch p, q enthält keinen Ort aus $S \setminus \{p, q\}$

es folgt:

wenn keine 4 Punkte von S auf einem gemeinsamen Kreis liegen, sind alle beschränkten Regionen von $DT(S)$ Dreiecke!

\Rightarrow Bezeichnung "Triangulation"



(a) Punkte in "allgemeiner Lage", (b) Spezialfall, wo DT ein Viereck enthält. (aus Schmitt / Deussen / Kreeb 1996)

Zusammenhang zur konvexen Hülle
und zum minimalen aufspannenden Baum:

Beobachtung: Jede Kante von $CH(S)$ ist eine Delaunay-Kante.

Beobachtung: Der MST zu S ist Teilgraph von $DT(S)$.

Spezielle Rolle der DT unter allen Triangulationen einer Punktmenge

Def. einer Triangulation einer Punktmenge S :

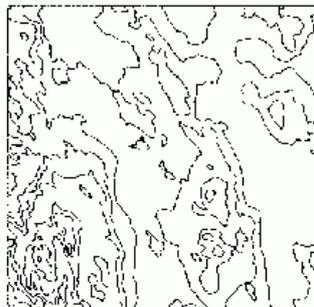
Gegeben: eine endliche Menge S von Punkten in der Ebene
Gesucht: eine Zerlegung der konvexen Hülle von S in Dreiecke, so dass die Elemente von S die Eckpunkte der Dreiecke sind.

alternative Def.: Triangulation von $S = \text{maximale}$ planare Unterteilung mit Knotenmenge S (Maximalität: jede zusätzliche Kante zwischen 2 Punkten von S würde eine existierende Kante schneiden).

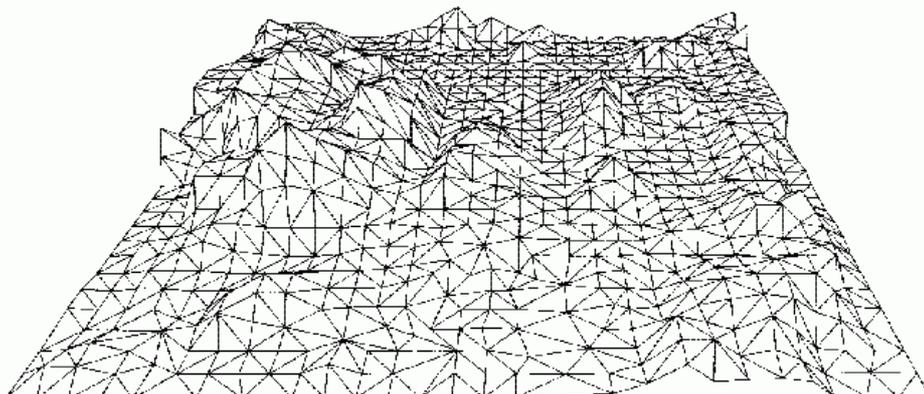
Anwendungen: Geodäsie, Finite-Elemente-Methode (FEM).

Beispiel:

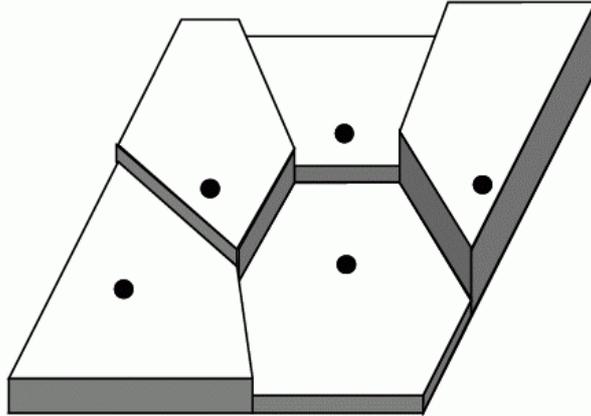
- *Terrain*:
2-dimensionale Fläche im 3-dimensionalen Raum, so daß jede vertikale Linie die Fläche in genau einem Punkt schneidet
- Terrain ist der Graph einer Funktion $f: \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Punkt p in dem Definitionsbereich \mathcal{A} des Terrains eine Höhe $f(p)$ zuordnet
- Visualisierung eines Terrains durch Konturlinien:



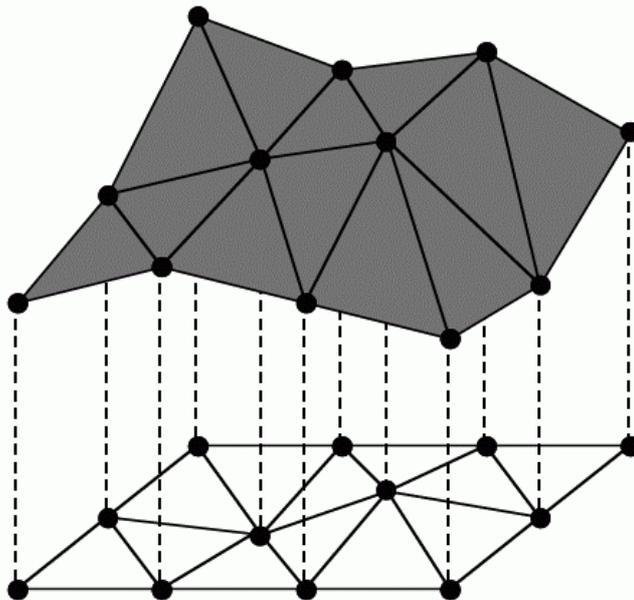
- Visualisierung eines Terrains durch perspektivische Aufsicht:



- Problem: Wert der Funktion f nur für eine endliche Menge $S \subset \mathcal{A}$ von Meßpunkten bekannt
 \Rightarrow Höhen der anderen Punkte in dem Definitionsbereich \mathcal{A} des Terrains müssen aus den Höhenwerten dieser Meßpunkte irgendwie approximiert werden
- naive Möglichkeit: weise jedem Punkt $p \in \mathcal{A}$ die Höhe des nächsten Meßpunktes zu \rightarrow nicht sehr natürlich:



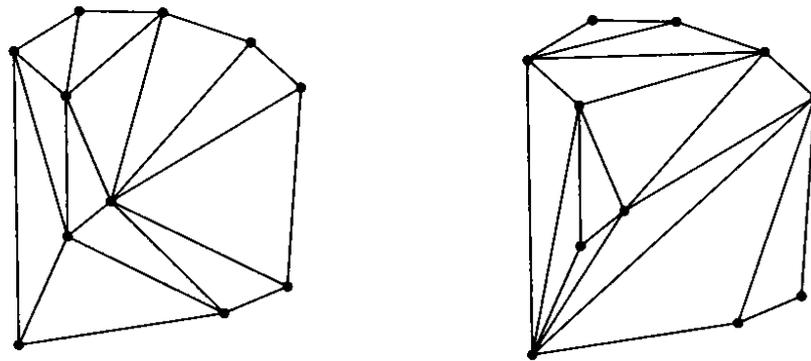
- Besser: bestimme zuerst eine Triangulierung von S , d.h. eine planare Unterteilung, deren beschränkte Regionen Dreiecke bilden und deren Eckpunkte die Punkte aus S sind. Lifte dann jeden Meßpunkt auf seine korrekte Höhe, wodurch jedes Dreieck der Triangulierung auf ein Dreieck im 3-d Raum abgebildet wird:



\Rightarrow *polyedrisches Terrain*, das den Graphen einer stetigen, stückweise linearen Funktion darstellt

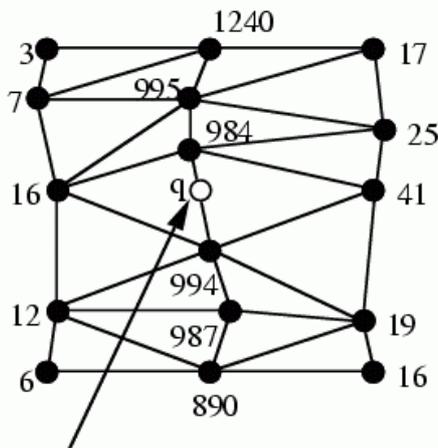
Triangulationen von Punktmengen i. allg. nicht eindeutig

Bsp.:

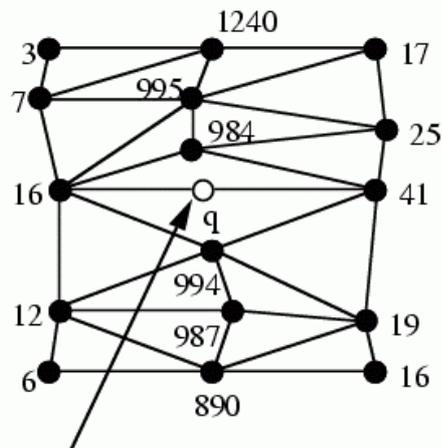


linke Variante wirkt "ausgeglichener" als die rechte

- Wie wird die Menge der gegebenen Meßpunkte trianguliert?
- Verschiedene Möglichkeiten, aber:
Welche Triangulierung ist die für die Approximation des Terrains am besten geeignete?



Höhe = 988



Höhe = 27

- Schlecht: Triangulierung mit kleinen Dreieckswinkeln \Rightarrow Beurteile Triangulierungen nach dem kleinsten, in ihnen auftretenden Dreieckswinkel. Wenn die kleinsten Winkel zweier Triangulierungen gleich sind, betrachte jeweils die zweitkleinsten Winkel, usw.
- Anzahl unterschiedlicher Triangulierungen einer endlichen Punktmenge S endlich $\Rightarrow \exists$ optimale Triangulierung, die den minimalen Winkel maximiert

spitze Winkel oft unerwünscht (z.B. wg. Rundungsfehlern)

Sei T Triangulation zu S

Winkelfolge $w(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3d})$ aufsteigend sortierte Folge der Innenwinkel aller d Dreiecke in T

Vergleich zweier Triangulationen T, T' : T' "schöner" als T

$:\Leftrightarrow w(T) < w(T')$

$:\Leftrightarrow \exists j, 1 \leq j \leq 3d$ mit $\alpha_k = \alpha'_k \forall 1 \leq k < j$ und $\alpha_j < \alpha'_j$

Satz: Sei S in allgemeiner Lage. Dann hat $DT(S)$ die größte Winkelfolge aller Triangulationen von S ; hierdurch ist $DT(S)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: siehe Klein, S. 236

verschiedene andere Optimalitätskriterien für Triangulierungen von S : (vgl. Vorlesung "Computergrafik")

- minimale Kantenlängensumme
Nachteil: verhindert nicht die Erzeugung langer, dünner Dreiecke (ungünstig bei FEM u. Visualisierung)
- *Max-Min-Winkelkriterium*: der kleinste vorkommende Dreieckswinkel wird maximiert
- *Min-Max-Winkelkriterium*: der größte vorkommende Dreieckswinkel wird minimiert
- *Max-Min-Radiuskriterium*: der kleinste Radius der in die Dreiecke einbeschriebenen Kreise wird maximiert
- *Min-Max-Radiuskriterium*: der größte Radius der in die Dreiecke einbeschriebenen Kreise wird minimiert
- *Max-Min-Flächenkriterium*: der kleinste Flächeninhalt der Dreiecke wird maximiert
- *Max-Min-Höhenkriterium*: die kleinste Höhe der Dreiecke wird maximiert

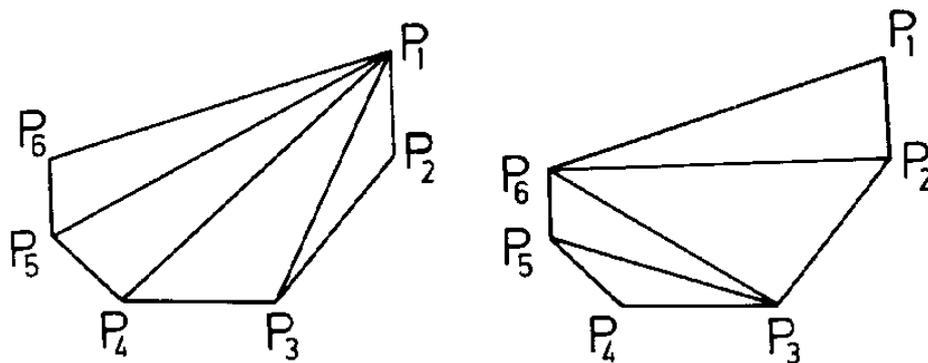
Alle Kriterien können (in speziellen Fällen) unterschiedliche Triangulierungen liefern!

Eine Triangulierung T heißt *lokal optimal* bzgl. eines Kriteriums K , wenn jedes Viereck, definiert durch je 2 entlang einer gemeinsamen Kante aneinandergrenzende Dreiecke von T , bzgl. K optimal trianguliert ist.

Eine Triangulierung T der Punktmenge S heißt *global optimal* bzgl. K , wenn jede andere Triangulierung von S ungünstiger als T bzgl. K ist.

Eine Punktmenge kann mehrere lokal optimale Triangulierungen haben:

Zwei bzgl. des Min-Max-Winkelkriteriums lokal optimale Triangulierungen von 6 Punkten:



Das *Max-Min-Winkelkriterium* ist das einzige bekannte Kriterium, für das lokale Optima stets auch globale Optima sind!

⇒ Auffinden des globalen Optimums dann durch lokale Operationen unabh. von der Vorgehensweise möglich.

(Aber: Häufig führen das Max-Min- und das Min-Max-Winkelkriterium zur gleichen Triangulierung – vergleichende Tests mit Zufalls-Punktmenge: Abweichungen nur in ca. 10 % der Fälle.)

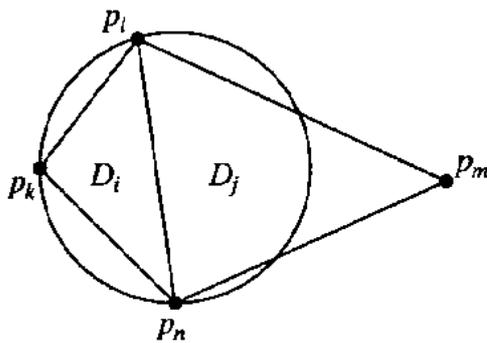
Satz:

Die mit dem Max-Min-Winkelkriterium konstruierte Triangulierung ist die Delaunay-Triangulierung.

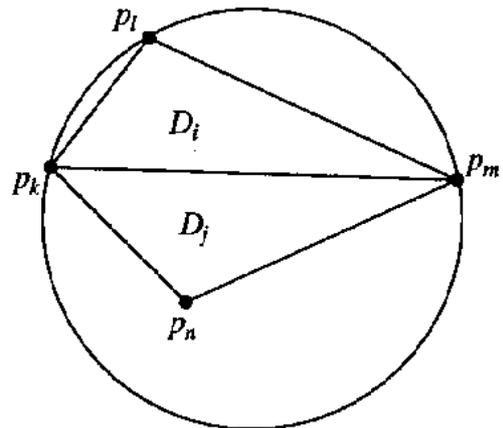
(Umformulierung des Satzes über die Winkelfolge; siehe auch Hoschek & Lasser 1992)

Lokales Umkreiskriterium für eine Triangulation:

Für je 4 Punkte, die zu 2 benachbarten Dreiecken der Triangulation gehören, enthält der Umkreis des einen Dreiecks *nicht* den vierten Punkt.



(a)



(b)

lokales Umkreiskriterium: links: erfüllt,

rechts: nicht erfüllt

globales Umkreiskriterium: für sämtliche Dreiecke der Triangulierung enthält ihr Umkreis keine Punkte aus S .

lokales Umkreiskrit. überall erfüllt \Rightarrow globales Umkreiskrit. gilt.

- Bei Nichterfüllung des lokalen Umkreiskrit. wird retrianguliert durch Diagonalentausch
- durch solche lokalen Änderungen ist das globale Optimum erreichbar
- *Optimum identisch zu Delaunay-Triangulation.*

Zusammenhang zwischen Voronoi-Diagrammen und konvexen Polyedern

(s. Hinrichs 2001)

- Interessante Beziehung zwischen Voronoi-Diagrammen und konvexen Polyedern
- Betrachte die Transformation h , die einen Punkt $p := (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ abbildet in die nicht-vertikale Ebene des \mathbb{R}^3
$$h(p): z = 2 \cdot p_x \cdot x + 2 \cdot p_y \cdot y - (p_x^2 + p_y^2)$$
- $h(p)$ ist die Tangentialebene an den Paraboloid $\mathcal{P}: z = x^2 + y^2$ im Punkt vertikal oberhalb von $(p_x, p_y, 0)$
- Für eine Menge S von Punkten in der Ebene $z = 0$ bezeichne $H(S)$ die Menge der Ebenen, die sich als Bilder der Punkte in S unter der Transformation h ergeben.
- C konvexes Polyeder, das sich als Schnitt der durch die Ebenen in $H(S)$ definierten positiven Halbräume ergibt, d.h.
$$C = \bigcap_{h \in H(S)} h^+$$
wobei h^+ den abgeschlossenen Halbraum oberhalb von h bezeichnet.
- Überraschung:
Die Projektion der Kanten und Ecken des Polyeders C vertikal nach unten auf die xy -Ebene ergibt das Voronoi-Diagramm.

C heißt auch "Lifting-Polyeder".

- $q := (q_x, q_y, 0)$ Punkt in der Ebene $z = 0$
- Vertikale durch q schneidet den Paraboloid \mathcal{P} im Punkt $q' := (q_x, q_y, q_x^2 + q_y^2)$ und die Ebene $h(p)$ in
$$q(p) := (q_x, q_y, 2 \cdot p_x \cdot q_x + 2 \cdot p_y \cdot q_y - (p_x^2 + p_y^2))$$

- Der vertikale Abstand zwischen q' und $q(p)$ beträgt

$$\begin{aligned} & q_x^2 + q_y^2 - 2 \cdot p_x \cdot q_x - 2 \cdot p_y \cdot q_y + p_x^2 + p_y^2 \\ &= (q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 = d(p, q)^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Ebene $h(p)$ kodiert zusammen mit dem Paraboloid den Abstand zwischen p und irgendeinem anderen Punkt q der Ebene $z = 0$.

Die Projektion von C auf die Ebene $z = 0$ ist das Voronoi-Diagramm von S .

Beweis:

zu zeigen: die Voronoi-Region eines Punktes $p \in S$ ist gerade die Projektion der Seitenfläche von C , die in der Ebene $h(p)$ liegt.

Sei q Punkt in der Ebene $z = 0$, der in der Voronoi-Region $V(p)$ von p liegt $\Rightarrow d(q, p) < d(q, r)$ für alle $r \in S$ mit $r \neq p$

zu zeigen: Vertikale durch q schneidet das konvexe Polyeder in einem Punkt, der in $h(p)$ liegt

Für einen Punkt $r \in S$ wird die Ebene $h(r)$ von der Vertikalen durch q geschnitten im Punkt

$$q(r) := (q_x, q_y, q_x^2 + q_y^2 - d(q, r)^2)$$

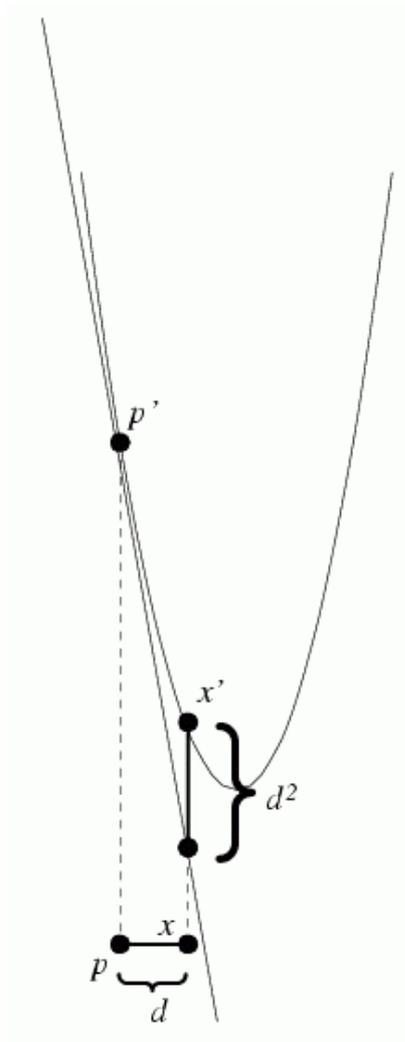
Von allen Punkten in S hat der Punkt p den kleinsten Abstand zu $q \Rightarrow q(p)$ ist der höchste Schnittpunkt \Rightarrow die Vertikale durch q schneidet das konvexe Polyeder C in einem Punkt auf $h(p)$. ■

- Berechnung von C durch einen divide & conquer Algorithmus in $O(n \cdot \log n)$ Zeit, Projektion von C in $O(n)$ Zeit \Rightarrow Voronoi-Diagramm in $O(n \cdot \log n)$ Zeit

(weitere effiziente Konstruktionsalgorithmen später)

Skizze der Abstandseigenschaft des Lifting-Polyeders C

(aus Gärtner 1996):



dualer Zusammenhang zur Delaunay-Triangulierung:

Der Teil der konvexen Hülle der auf das Paraboloid \mathcal{P} projizierten Punktmenge S' , der von der Ebene ($z=0$), in der S liegt, sichtbar ist, heißt untere konvexe Hülle von S' .

Die (zur z -Achse parallele) Projektion der unteren konvexen Hülle von S' auf die Ebene $z=0$ ist die Delaunay-Triangulierung von S .

Beweisidee:

Das Dreieck pqr gehöre zu $DT(S)$. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle Punkte $s \in S \setminus \{p, q, r\}$ der Punkt s nicht im Umkreis von pqr liegt. Durch Nachrechnen stellt man fest, dass dies genau dann gilt, wenn für alle $s \in S \setminus \{p, q, r\}$ der Paraboloid-Punkt s' über der Ebene durch die Punkte p', q', r' liegt. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass das Dreieck $p'q'r'$ eine Seitenfläche der unteren konvexen Hülle von S' ist.