

6. Polygontriangulierung: Wie bewacht man eine Kunstgalerie?

6.1. Grundlegendes zu Polygonen

Es sei P ein einfaches Polygon in der Ebene; P habe n Ecken.

Definition:

Diagonale von P = Liniensegment zwischen 2 Ecken von P ,
das in P enthalten ist,
aber mit ∂P nur seine Eckpunkte gemeinsam hat
→ zerlegt P in zwei einfache Teilpolygone

Hilfssatz:

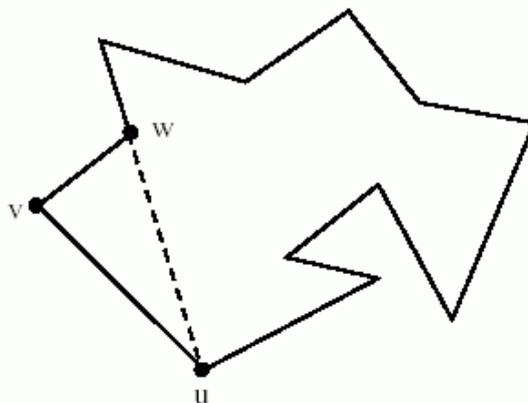
Zu jedem einfachen Polygon mit mehr als 3 Ecken existiert eine Diagonale.

Beweis:

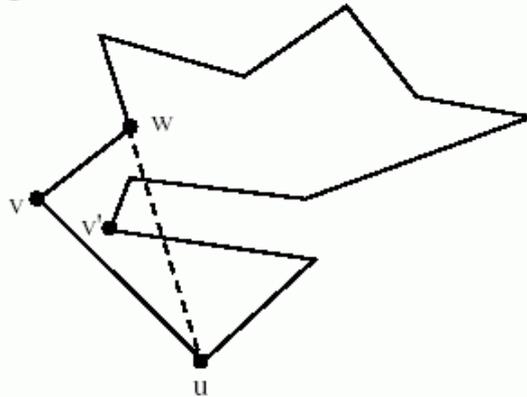
v sei der am weitesten links liegende Eckpunkt von \mathcal{P} .

u und w seien die beiden benachbarten Eckpunkte von v auf \mathcal{P} .

Liegt das offene Segment \overline{uw} im Innern von \mathcal{P} , so haben wir eine Diagonale gefunden:



Sonst gibt es einen oder mehrere Eckpunkte von \mathcal{P} , die im Innern des von u, v und w aufgespannten Dreiecks oder auf der Diagonalen \overline{uw} liegen:

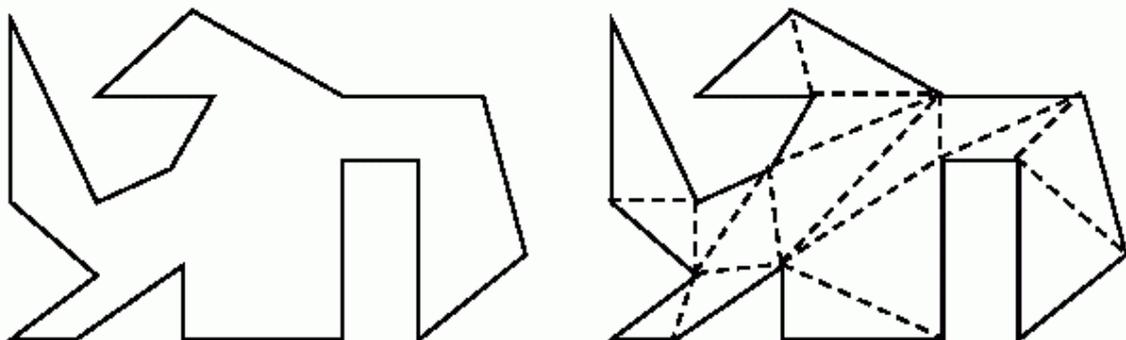


Sei v' derjenige Eckpunkt mit dem größten Abstand von \overline{uw} . $\overline{v'v}$ kann keine Kante von \mathcal{P} schneiden, da solch eine Kante einen Endpunkt innerhalb des Dreiecks besitzen würde, der weiter als v' von \overline{uw} entfernt wäre, was der Definition von v' widersprechen würde $\Rightarrow \overline{v'v}$ eine Diagonale $\Rightarrow \exists$ Diagonale

(aus Hinrichs 2001)

Definition:

- Eine Zerlegung eines Polygons in Dreiecke durch eine maximale Menge von sich nicht schneidenden Diagonalen nennt man eine Triangulation des Polygons:



- Triangulation gewöhnlich nicht eindeutig!

alternative Def.: Triangulation von $P = \partial P \cup$ maximale Menge sich nicht kreuzender Diagonalen von P .

Satz:

Jedes einfache Polygon lässt sich triangulieren.

Beweis:

Vollständige Induktion über n .

$n = 3$: trivial.

Sei $n > 3$, und wir nehmen an, die Aussage sei wahr für jedes einfache Polygon mit Eckenzahl $m < n$. Sei P einf. Polygon mit n Ecken.

Nach dem Hilfssatz ex. eine Diagonale von P .

Diagonale schneidet P in zwei einfache Teilpolygone P_1 und P_2 .

m_1 : Anzahl Eckpunkte von P_1

m_2 : Anzahl Eckpunkte von P_2

$m_1 < n$, $m_2 < n$

$\Rightarrow P_1$ und P_2 können trianguliert werden (Ind.vor.)

$\Rightarrow P$ kann trianguliert werden.

Satz:

Jede Triangulation eines einfachen Polygons mit n Ecken besitzt genau $n-2$ Dreiecke und $n-3$ Diagonalen.

Beweis:

Induktion über n . Für $n = 3$ trivial. Sei $n > 3$. P habe n Ecken.

Sei T eine Triangulation von P .

D sei eine Diagonale aus $T \Rightarrow D$ zerlegt P in 2 Teilpolygone mit m_1 bzw. m_2 Ecken; $m_1 + m_2 = n + 2$ (da D hier doppelt gezählt).

Nach Induktionsannahme:

1. Teilpolygon hat $m_1 - 2$ Dreiecke und $m_1 - 3$ Diagonalen,

2. Teilpolygon hat $m_2 - 2$ Dreiecke und $m_2 - 3$ Diagonalen.

$\Rightarrow T$ hat $(m_1 - 2) + (m_2 - 2) = n + 2 - 4 = n - 2$ Dreiecke

und $(m_1 - 3) + (m_2 - 3) + 1 = n + 2 - 6 + 1 = n - 3$ Diagonalen.

Hilfssatz: In jeder Triangulation T eines einfachen Polygons existiert ein Dreieck, das nur eine Diagonale als Kante hat (wo die anderen beiden Kanten also Polygonkanten sind).

Beweis:

indirekt. Annahme:

0 Dreiecke von T haben genau 1 Diagonale als Kante,
 a Dreiecke von T haben genau 2 Diagonalen als Kante,
 b Dreiecke von T haben genau 3 Diagonalen als Kante.

Nach dem vorherigen Satz gilt:

Anzahl der Dreiecke = $a + b = n - 2$,

Anzahl der Diagonalen = $n - 3$; da jede Diagonale zu genau 2 Dreiecken gehört, muss gelten: $2a + 3b = 2(n - 3)$.

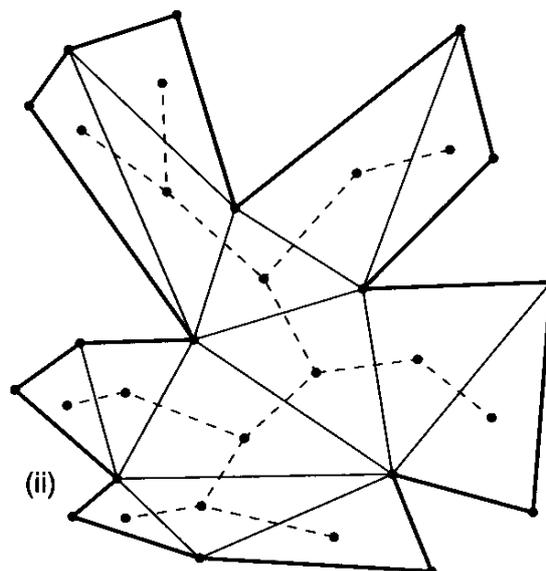
Aus beiden Gleichungen $a + b = n - 2$ und $2a + 3b = 2(n - 3)$ erhält man die absurde Konsequenz $b = -2$; Widerspruch.

Dualer Graph einer Triangulation T von P

Dualer Graph T^* zu T :

Knoten = Dreiecke von T

Kante (u, v) g.d.w. Dreiecke u, v haben gemeinsame Kante d



Satz: T^* ist ein Baum mit Knotengrad ≤ 3 .

Beweis:

Grad ≤ 3 da ein Dreieck max. 3 Nachbardreiecke hat

Dreiecke von T füllen P lückenlos aus $\rightarrow T^*$ zusammenhängend

zeige: T^* ist azyklisch: durch Induktion:

Hilfssatz $\rightarrow \exists$ Dreieck D in T , das nur eine Diagonale als Kante hat

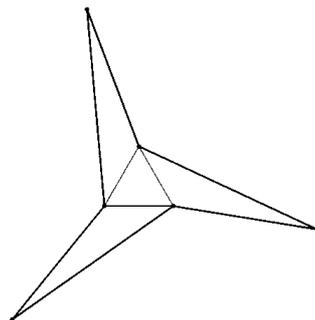
entferne D aus P und T . $\rightarrow P'$ mit $n - 1$ Ecken

Ind.-Annahme: T'^* ist azyklisch

$\rightarrow T^*$ azyklisch. □

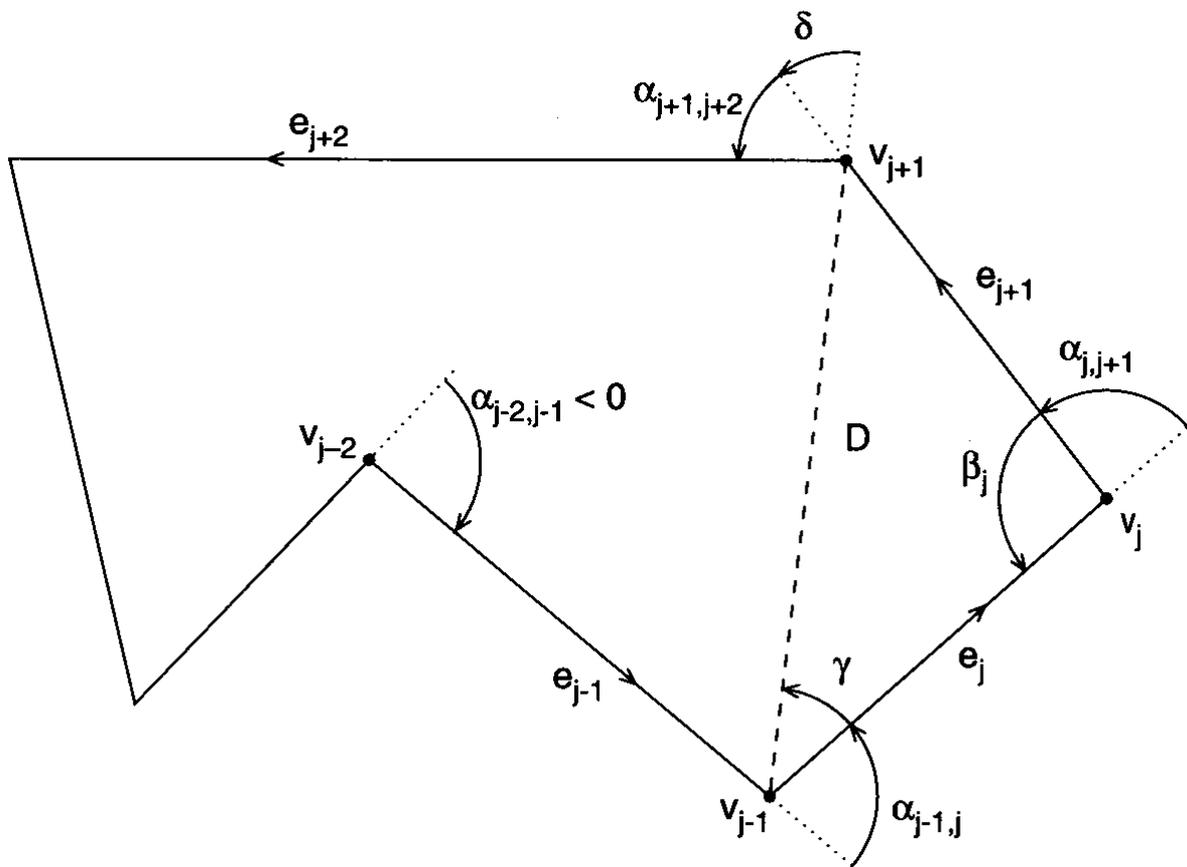
Kann man den Knotengrad weiter herabdrücken, d.h. findet man immer eine Triangulation, in der jedes Dreieck höchstens **zwei** Nachbardreiecke hat?

– Nein!



Daß sich Polygone triangulieren lassen, ist oft ein nützliches Beweishilfsmittel. Betrachten wir zum Beispiel die Drehungen, die eine *Schildkröte* ausführen müßte, während sie sich gegen den Uhrzeigersinn auf dem Rand eines Polygons entlangbewegt.¹¹ Die Kanten werden von einer beliebigen Startkante aus mit e_0, e_1, \dots, e_{n-1} durchnummeriert. Mit $\alpha_{i,i+1}$ wird die Drehung bezeichnet, die für den Übergang von e_i nach e_{i+1} erforderlich ist; siehe Abbildung . Dabei werden Linksdrehungen positiv und Rechtsdrehungen negativ gezählt.

¹¹Um diese *turtle geometry* geht es in dem gleichnamigen Buch von Abelson und diSessa [1]. In der Programmiersprache LOGO gibt es eine *turtle*, die durch Vorwärtsbewegungen und Drehungen gesteuert wird.



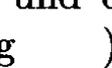
Für $i \neq k$ bezeichnen wir mit

$$\alpha_{i,k} = \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \dots + \alpha_{k-1,k}$$

die Summe der Drehwinkel von Kante e_i bis zur Kante e_k . Die Winkelsumme bei *einem vollständigen Umlauf* von e_i bis e_i wird auch die *Gesamtdrehung* genannt und mit $\alpha_{i,i}$ bezeichnet. Es gilt folgende schöne Aussage:

Satz:

Sei P ein einfaches Polygon und e_i eine beliebige Kante von P . Dann ist $\alpha_{i,i} = 2\pi$.

Beweis. Durch Induktion über die Kantenzahl $n \geq 3$. Sei $n = 3$. Da sich der äußere Drehwinkel $\alpha_{j,j+1}$ und der Innenwinkel β_j jeweils zu π aufaddieren (vgl. Abbildung ), folgt

$$\alpha_{i,i} = \sum_{j=0}^2 \alpha_{i+j,i+j+1} = \sum_{j=0}^2 (\pi - \beta_{i+j}) = 3\pi - \sum_{j=0}^2 \beta_{i+j} = 2\pi,$$

denn die Summe der Innenwinkel beträgt beim Dreieck bekanntlich π .

Hat das Polygon mehr als drei Ecken, wählen wir eine Diagonale, die ein Dreieck D vom Rest des Polygons abtrennt, und wenden die Induktionsvoraussetzung auf den Rest an. Dann fügen wir das Dreieck D wieder hinzu und betrachten die Änderung in der Winkelsumme, die sich hierdurch ergibt; mit den Bezeichnungen von Abbildung 4.17 erhöht sie sich gerade um

$$\alpha_{j,j+1} - (\gamma + \delta) = \pi - (\beta_j + \gamma + \delta) = 0.$$

□

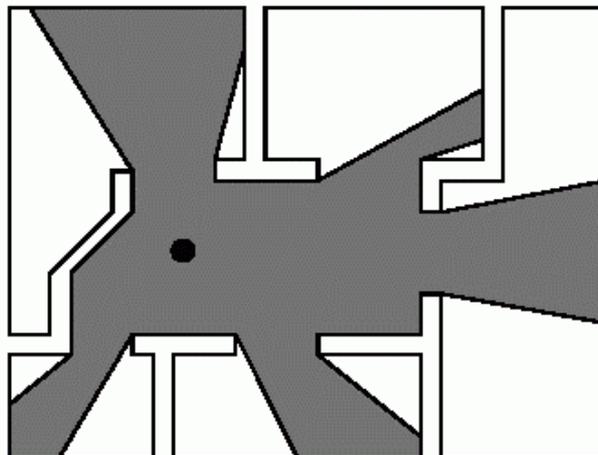
(aus Klein 1997).

6.2. Das Art-Gallery-Theorem

"Art-Gallery-Problem":

wieviele Kameras werden zur Bewachung einer Kunstgalerie benötigt?

- Eine Kunstgalerie wird beschrieben durch ein einfaches Polygon, d.h. ein Polygon, dessen Kanten sich nur in den Endpunkten schneiden dürfen. Das Polygon darf keine Löcher haben. Eine Kameraposition wird gegeben durch einen Punkt in diesem Polygon, die Kamera sieht alle die Punkte, mit denen sie durch ein offenes Segment, das ganz im Innern des Polygons liegt, verbunden werden kann:



- Wie viele Kameras werden zur Bewachung der Galerie benötigt?
- Offensichtlich: Je komplexer das Polygon, um so mehr Kameras werden benötigt.
- Die Schranke für die Anzahl Kameras wird in Abhängigkeit von der Anzahl n der Eckpunkte des Polygons ausgedrückt.
- Konvexes Polygon kommt, unabhängig von n , immer mit einer Kamera aus!
- Wir betrachten den schlimmsten Fall, d.h. wir geben obere Schranke für alle Polygone mit n Eckpunkten.

Einfache (aber ineffiziente) Lösung:

- Bewachung von \mathcal{P} , indem in jedes Dreieck einer Triangulation $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ von \mathcal{P} eine Kamera plaziert wird.

Aus obigem Satz über Anzahl der Dreiecke in T_P folgt:

Jedes einfache Polygon mit n Eckpunkten kann durch $n-2$ Kameras überwacht werden.

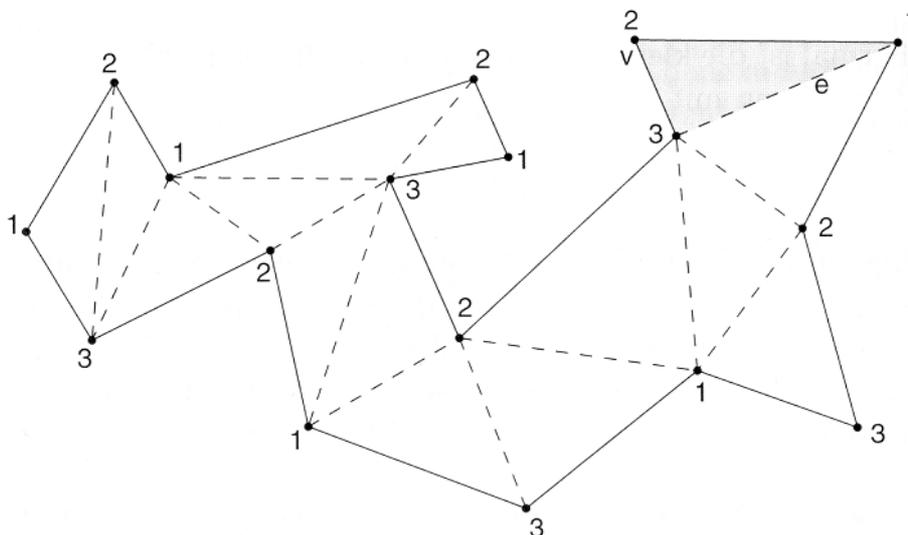
Aber:

- Nicht notwendig, in jedem Dreieck eine Kamera zu plazieren. Eine auf einer Diagonalen plazierte Kamera kann zwei Dreiecke überwachen \Rightarrow durch Plazierung der Kameras auf wohlausgewählten Diagonalen kann deren Anzahl auf $n/2$ reduziert werden.
Noch besser: Kameras in den Eckpunkten plazieren, da ein Eckpunkt inzident zu mehreren Dreiecken \Rightarrow alle diese Dreiecke können durch eine Kamera überwacht werden
- Sei \mathcal{T}_P eine Triangulation von P .
 - Selektiere Teilmenge von Eckpunkten von P , so daß jedes Dreieck wenigstens einen selektierten Eckpunkt besitzt.
 - Plaziere die Kameras in den selektierten Eckpunkten.

Vierfarbensatz: Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

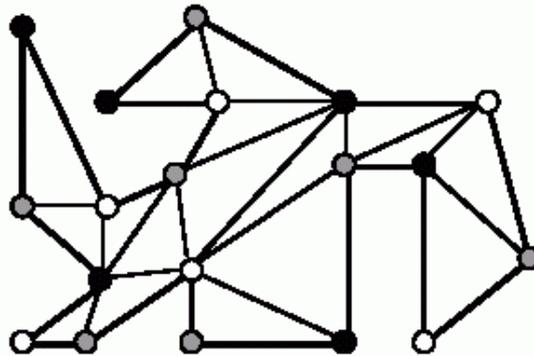
Wir nutzen aus: Triangulationen sind spezielle planare Graphen, die sogar 3-färbbar sind.

Beachte: Bei "Färbbarkeit" wird hier immer vorausgesetzt, dass 2 Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, verschieden gefärbt sind.



Um dann eine geeignete Teilmenge von Ecken für die Überwachung zu finden, färbe man die Eckenmenge mit 3 Farben (z.B. weiß, grau, schwarz) und platziere die Kameras z.B. in allen grau gefärbten Ecken \Rightarrow das gesamte Polygon wird überwacht.

- Wähle für die Platzierung der Kameras die Farbe mit der minimalen Anzahl Eckpunkte \Rightarrow Polygon kann mit höchstens $\lfloor n/3 \rfloor$ Kameras überwacht werden.



noch zu zeigen: es existiert immer eine 3-Färbung.

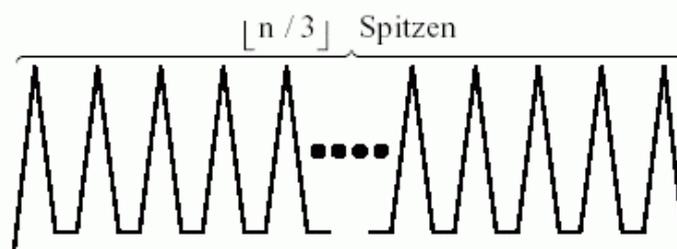
Wir traversieren den dualen Graphen $G(T_P)$ der Triangulierung durch Tiefensuche (depth-first search) (dabei wird ausgenutzt: dieser ist Baum; s.o.)

- Aufrechterhalten folgender Invariante während der Tiefensuche: Alle Eckpunkte der bereits angetroffenen Dreiecke sind weiß, grau oder schwarz eingefärbt, und keine zwei miteinander verbundenen Eckpunkte sind gleich eingefärbt worden.
- Invariante \Rightarrow gültige 3-Färbung, nachdem alle Dreiecke angetroffen wurden.

- Tiefensuche kann an einem beliebigen Knoten des Graphen $\mathcal{G}(\mathcal{T}_\varphi)$ starten. Die drei Eckpunkte des entsprechenden Dreiecks werden weiß, grau und schwarz eingefärbt.
- Erreichen eines Knotens v von einem Knoten μ kommend: Dreiecke $t(v)$ und $t(\mu)$ haben eine Diagonale gemeinsam. Eckpunkte von $t(\mu)$ wurden bereits eingefärbt \Rightarrow nur noch ein Eckpunkt von $t(v)$ einzufärben
Für diesen Eckpunkt gibt es nur noch eine verfügbare Farbe, nämlich die Farbe, die für die beiden Endpunkte der gemeinsamen Diagonale zwischen $t(v)$ und $t(\mu)$ nicht benutzt wurde.
 $\mathcal{G}(\mathcal{T}_\varphi)$ Baum \Rightarrow die anderen zu v benachbarten Knoten noch nicht besucht \Rightarrow weise dem Eckpunkt die noch verbleibende Farbe zu

Somit kann jedes einfache Polygon durch $\lfloor n/3 \rfloor$ Kameras überwacht werden.

- Geht es auch mit noch weniger Kameras? Eine an einem Eckpunkt plazierte Kamera kann ja mehr als nur die inzidenten Dreiecke überwachen!
- Nein! Für jedes n existieren einfache Polygone, die $\lfloor n/3 \rfloor$ Kameras benötigen.
Beispiel: kammförmiges Polygon mit $\lfloor n/3 \rfloor$ Spitzen, so daß eine Kamera von keinem Punkt des Polygons aus gleichzeitig in zwei Spitzen hineinsehen kann:



Damit gezeigt:

Satz ("Art Gallery Theorem"):

Für ein einfaches Polygon \mathcal{P} sind $\lfloor n/3 \rfloor$ Kameras gelegentlich notwendig und immer ausreichend, um jeden Punkt in \mathcal{P} von wenigstens einer Kamera sehen zu können.

Bemerkung:

Eine geeignete Menge von $\lfloor n/3 \rfloor$ Kamerapositionen kann in der Zeit $O(n \log n)$ gefunden werden.

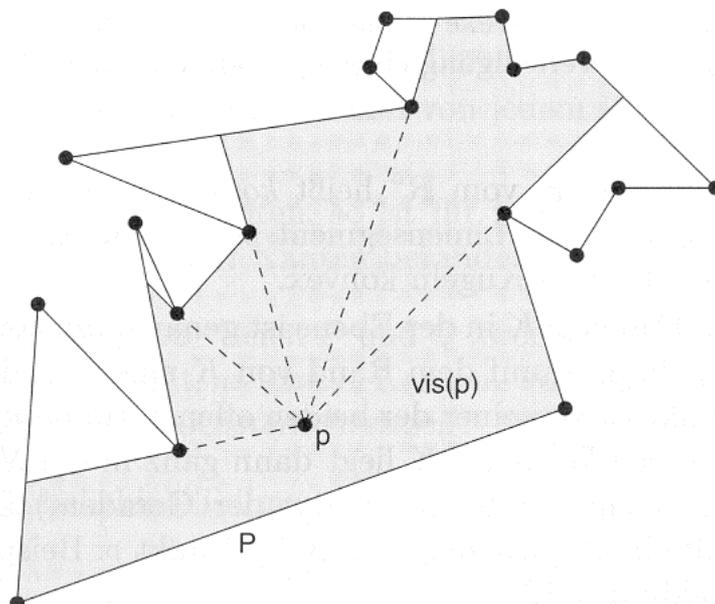
(Hinrichs 2001)

6.3. Das Sichtbarkeitspolygon

Das "Art-Gallery-Problem" als Spezialfall der Fragestellung:

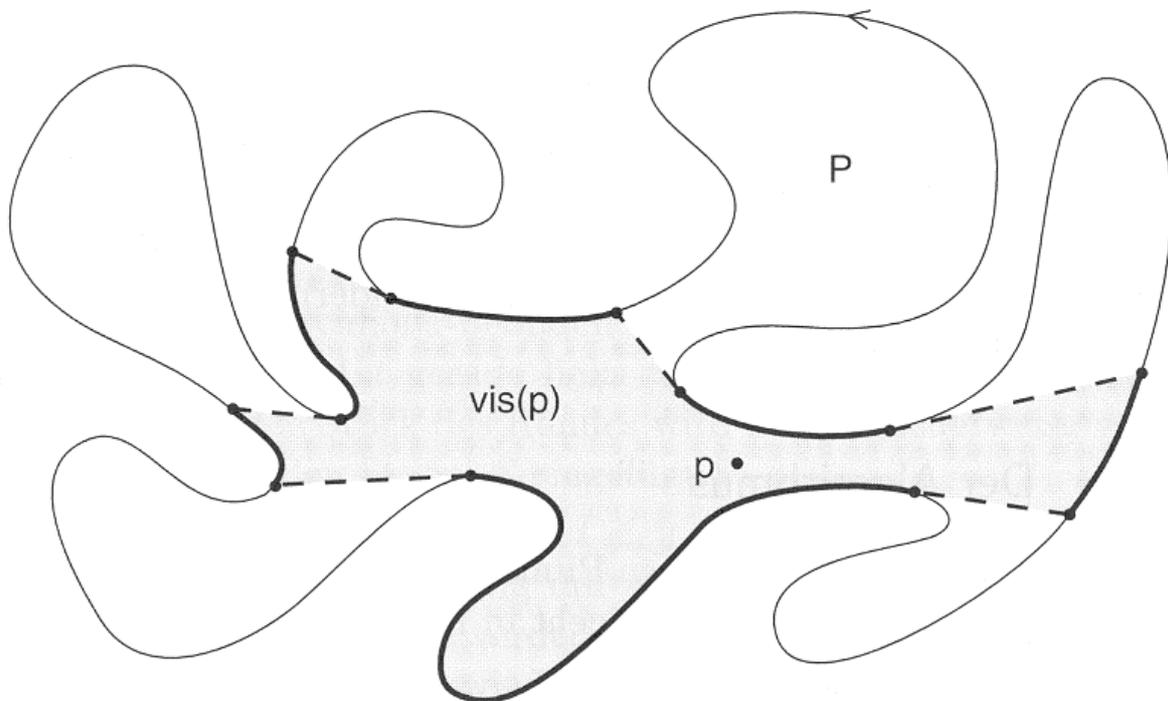
Welche Punkte innerhalb eines Polygons sind von einem gegebenen Punkt aus sichtbar?

Sei p ein Punkt im Inneren des einfachen Polygons P .
Sichtbarkeitspolygon $vis(p)$ = der Teil von P , der von p aus sichtbar ist



Anwendung: Bewegungsplanung für Roboter

was kann ein Roboter von einem gegebenen Punkt aus sehen?



Kanten von $vis(p)$:

- Teile von Kanten von P (dick gezeichnet)
- "künstliche Kanten" (gestrichelt) = Teile von Tangenten von p an den Rand von P

zur Konstruktion von $vis(p)$ genügt es, die Kanten des ersten Typs zu bestimmen.

gegeben: Rand von P als zyklisch verkettete Liste von Strecken und Punkt p in P

Algorithmus zur Bestimmung von $vis(p)$ in linearer Zeit:

- starte mit sichtbarem Punkt auf dem Rand (auffindbar durch Schnitt von Strahl mit Rand von P)
- durchlaufe den Rand von P gegen den Uhrzeigersinn
- führe Stack S mit, der potenziell sichtbare Teile des Randes verwaltet

- aktualisiere S bei bestimmten Änderungen der Bewegungsrichtung relativ zu p (Fallunterscheidungen)
- am Ende des Umlaufs enthält S genau die von p sichtbaren Teile des Randes
- ergänze die künstlichen Kanten und gebe $vis(p)$ aus

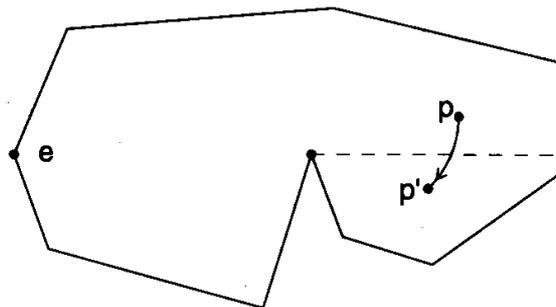
Details bei Klein (1997), S. 186-192.

wichtig in der Robotik:

wie ändert sich $vis(p)$, wenn sich p innerhalb von P bewegt?

bei kleinen Bewegungen: Menge der sichtbaren Ecken ändert sich zunächst nicht

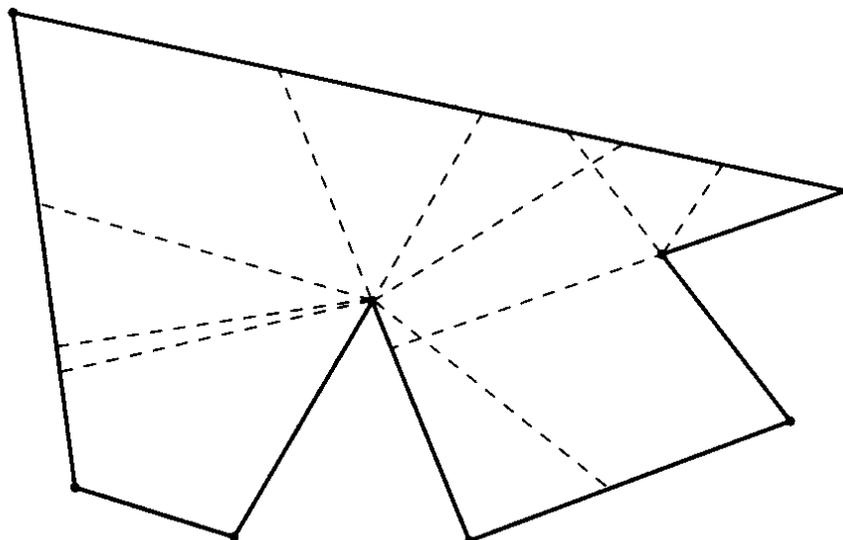
- ändert sich erst, wenn p die Verlängerung einer Tangente von einer Ecke e an eine spitze Ecke (Innenwinkel $> 180^\circ$) überschreitet (kritisches Tangentenstück = "Sichtsegment")



Äquivalenzrelation zwischen Punkten in P :

p äquivalent zu p' \Leftrightarrow von p aus sind genau dieselben Ecken von P sichtbar wie von p' aus.

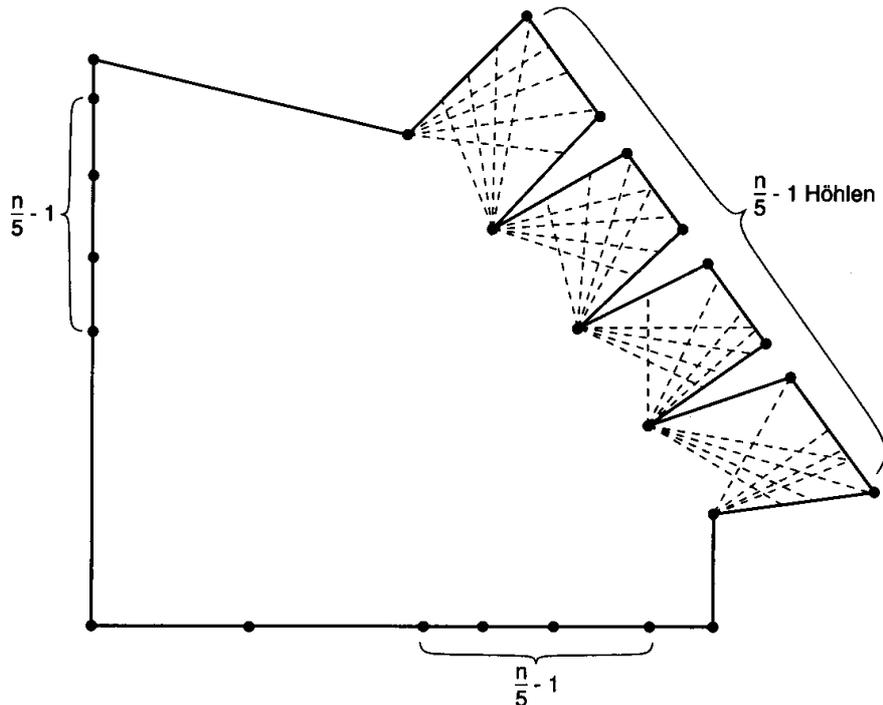
Äquivalenzklassen = *Sichtregionen*.



Übungsaufgabe: Man zeige, dass die Sichtregionen stets konvex sind. (\Rightarrow je 2 äquivalente Punkte können einander sehen.)

Die Anzahl der Sichtregionen ist $\Theta(n^3)$ (Beweis: s. Klein 1997).

Beispiel für die untere Schranke (Polygon mit Anzahl Sichtregionen kubisch in der Eckenzahl n):



6.4. Sternpolygone

Definition:

Ein einfaches Polygon P heißt *sternförmig* oder *Sternpolygon*, wenn es einen Punkt p in P gibt, so dass $vis(p) = P$.

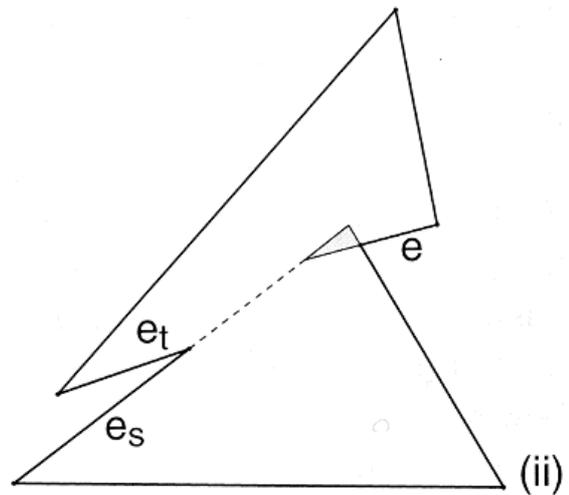
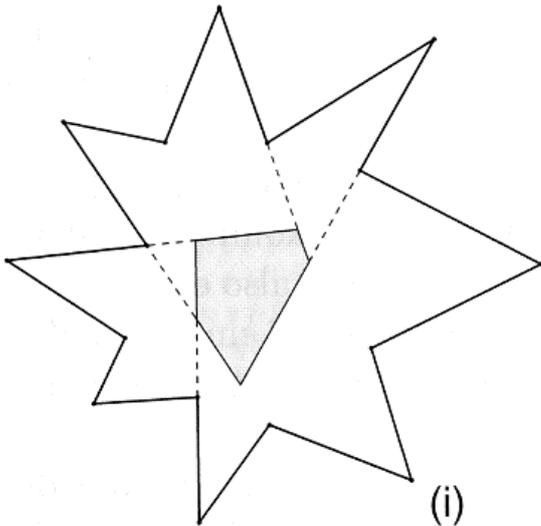
Gesamtheit aller Punkte in P mit dieser Eigenschaft:

Kern von P

$$ker(P) = \{ p \in P \mid vis(p) = P \}.$$

Es gilt: P sternförmig $\Leftrightarrow ker(P) \neq \emptyset$.

Beispiele für Sternpolygone (Kern schraffiert):



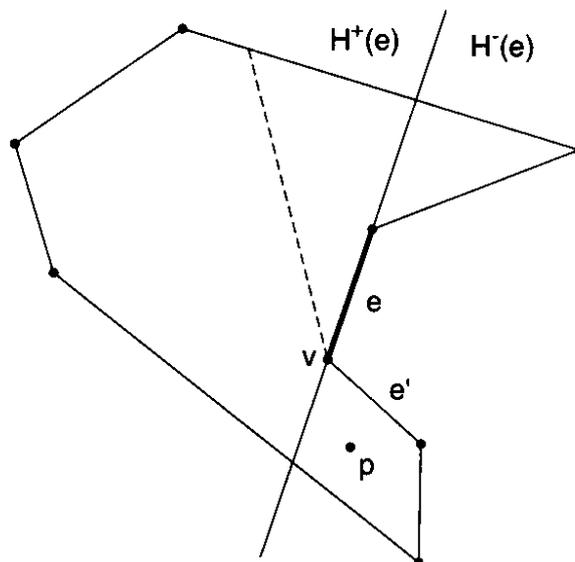
Es gilt:

- P konvex $\Leftrightarrow \ker(P) = P$
- $\forall p \in P: \ker(P) \subseteq \ker(\text{vis}(p))$

(Beweis: Übung)

Es sei P einfaches Polygon, der Rand von P sei gegen den Uhrzeigersinn orientiert.

Für eine Kante e von P bezeichne $H^+(e)$ die abgeschlossene Halbebene links von e und $H^-(e)$ die offene Halbebene rechts von e . (In der Nähe der Kante e ist also das Innere von P in $H^+(e)$ enthalten, s. Abb.).



Satz:
Es gilt:

$$\ker(P) = \bigcap_{e \text{ Kante von } P} H^+(e)$$

Beweis:

Der Kern ist in jeder Halbebene $H^+(e)$ enthalten (vgl. Abb.):
wenn ein $p \in H^+(e)$ überhaupt zu P gehört, ist von p aus
jedenfalls e nicht sichtbar.

Liege nun p im Durchschnitt, also in jeder Halbebene $H^+(e)$.

$\Rightarrow p$ liegt in P ,

denn sonst: p könnte mindestens 1 Kante e "von außen" sehen
und läge deshalb in $H^-(e)$.

Annahme: $p \notin \ker(P)$

$\Rightarrow \text{vis}(p)$ echte Teilmenge von P

$\Rightarrow \exists$ spitze Ecke v von P mit Kanten e und e' , so dass p nur e'
sehen kann, aber nicht e (siehe Abb.)

$\Rightarrow p \in H^-(e)$, Widerspruch.

Somit:

Kern von P Durchschnitt von n bekannten Halbebenen

\Rightarrow Kern lässt sich in der Zeit $O(n \log n)$ berechnen

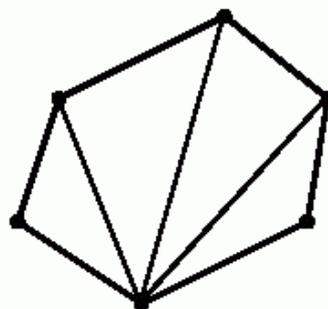
Lee & Preparata (1979) haben gezeigt, dass der Kern sogar in
linearer Zeit berechnet werden kann (s. Klein 1997, S. 199-
204).

Man nutzt aus: Vorsortieren der Halbebenen nach Winkeln; Berechnung
von Durchschnitten von Halbebenen dann in Zeit $O(n)$ (durch Reduktion
auf Berechnung der konvexen Hülle sortierter Punktmenge).

6.5. Effiziente Triangulierung von Polygonen

Sei P wieder ein einfaches Polygon mit n Ecken.
Wir wissen: Triangulation von P existiert immer.

- konstruktiver Beweis \Rightarrow rekursiver Triangulationsalgorithmus:
Finde eine Diagonale und trianguliere die beiden sich ergebenden Teilpolygone rekursiv.
- Auffinden der Diagonale: nehme den am weitesten links liegenden Eckpunkt von P und versuche, ihn mit seinen zwei Nachbarn u und w zu verbinden; falls dies nicht klappt, verbinde v mit dem Eckpunkt, der innerhalb des durch u , v und w definierten Dreiecks am weitesten von \overline{uw} entfernt liegt.
- Zeitaufwand für das Auffinden der Diagonale: $O(n)$
- Diagonale kann P in ein Dreieck und ein Polygon mit $n - 1$ Eckpunkten aufteilen, z.B. wenn es uns gelingt, u und w miteinander zu verbinden
 \Rightarrow Triangulationsalgorithmus benötigt im schlimmsten Fall $O(n^2)$ Zeit
- Geht es schneller?
- Sicherlich für einige Klassen von Polygonen, z.B. für konvexe Polygone: Wähle einen Eckpunkt des Polygons und ziehe Diagonalen von diesem Eckpunkt zu allen anderen Eckpunkten außer den direkten Nachbarn:

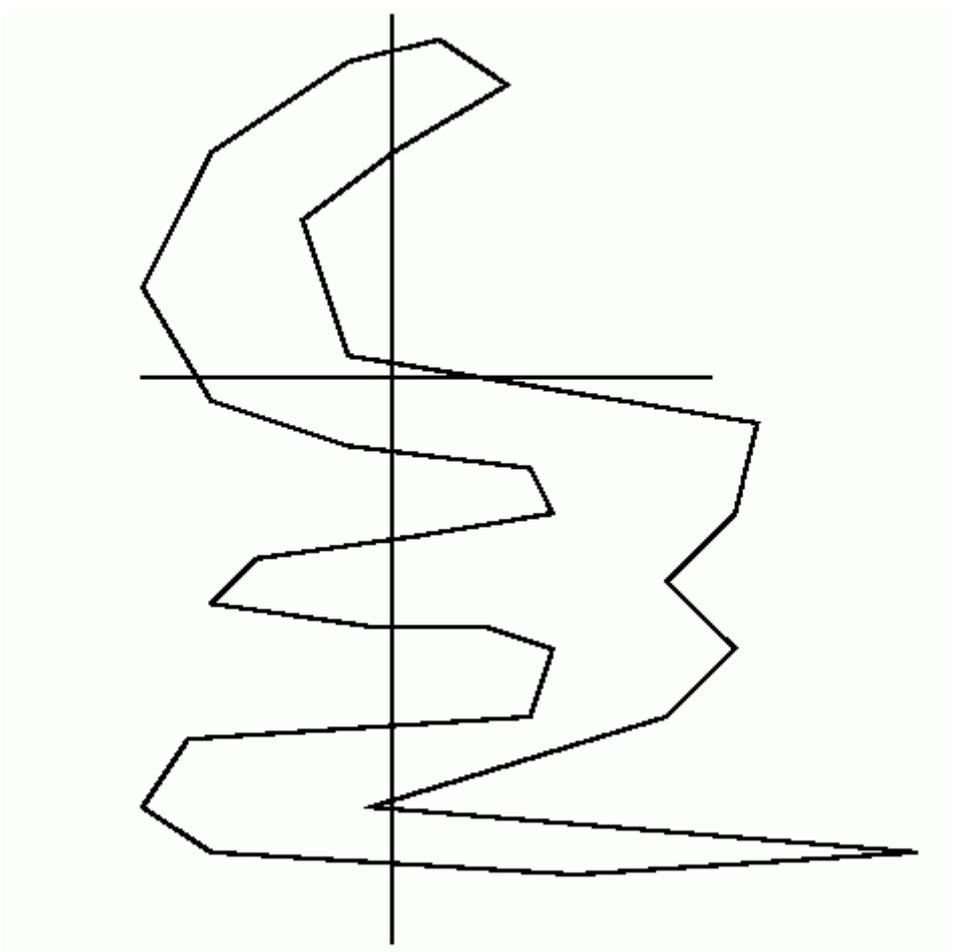


- Zeitaufwand: $O(n)$

- möglicher Zugang, ein nicht-konvexes Polygon \mathcal{P} zu triangulieren: zerlege \mathcal{P} zunächst in konvexe Teilpolygone und trianguliere dann diese Teilpolygone.
- Aber: Zerlegung eines Polygons in konvexe Teilpolygone ist genauso schwierig wie Triangulation.
- Besser: Zerlegung von \mathcal{P} in sogenannte monotone Teilpolygone, was sich als sehr viel einfacher herausstellt.

Definition:

Eine einfaches Polygon \mathcal{P} heißt *monoton* bzgl. einer Geraden g , falls für jede Gerade g' senkrecht zu g der Schnitt des Polygons mit g' zusammenhängend ist. Mit anderen Worten sollte der Schnitt ein Liniensegment, ein Punkt oder die leere Menge sein. Ein bzgl. der y -Achse monotones Polygon heißt *y -monoton*.



- Charakteristische Eigenschaft für y-monotone Polygone:
Wenn man vom obersten Eckpunkt entlang des linken (oder rechten) Randes zum untersten Eckpunkt läuft, so bewegt man sich immer abwärts oder horizontal, aber nie aufwärts.
- Strategie für Triangulation von Polygon \mathcal{P} :
Zerlege \mathcal{P} zuerst in y-monotone Teilpolygone und trianguliere dann die Teilpolygone.

Zerlegung in monotone Polygone: in Zeit $O(n \log n)$
 Triangulierung monotoner Polygone: in Zeit $O(n)$

genauere Beschreibung der Algorithmen: siehe Vorlesung "Computergrafik";

http://www-gs.informatik.tu-cottbus.de/~wwwgs/cg_v08c.pdf

Anderer Ansatz: Triangulierung beliebiger einfacher Polygone durch sukzessives Abschneiden geeigneter konvexer Ecken ("Ohren") – *Algorithmus von Kong*
 s. ebenfalls Vorlesung "Computergrafik"

worst-case Zeitkomplexität: $O(n^2)$; Algorithmus kann aber von Vorteil sein bei Polygonen mit geringer Zahl nichtkonvexer Ecken.

Optimales Triangulierungsverfahren? – lange offenes Problem.

Chazelle'91:

Jedes einfache Polygon kann in Zeit $O(n)$ trianguliert werden.
 (aber kaum praktikabel)

Seidel'91: randomisierte inkrementelle Konstruktion

Jedes einfache Polygon kann in Zeit $O(n \log^* n)$ trianguliert werden.
 (fast linear, praktikabel)

Bem.: $\log^* n$ ist die kleinste ganze Zahl m , für die die m -fache Logarithmierung $\log(\log(\dots \log(n) \leq 1)$ wird.