Algorithmische Geometrie

1. Einleitung

Gegenstand:
Entwicklung (Entwurf, Analyse und Implementierung) effizienter und praktikabler Algorithmen zur Lösung geometrischer Probleme.

Als eigenständige Disziplin seit ca. 1975.
Aber: Grundlagen sind schon sehr alt!

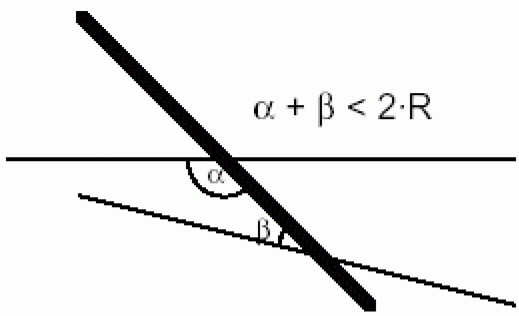
Geschichtlicher Rückblick (aus Hinrichs 2001):

- Euklid (Alexandria, ca. 300 v. Chr.): Elemente

Axiomatische Beweismethode

- Aus den aus der Wirklichkeit abstrahierten Grundbegriffen und Grundrelationen, den Axiomen, werden die weiteren Aussagen nur mit Hilfe der Logik ohne weiteren Rückgriff auf Anschauung oder Erfahrung hergeleitet.

- Postulat V (*Parallelenpostulat*):
  Wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte, dann treffen sich die beiden Geraden, wenn man sie auf dieser Seite verlängert.



- David Hilbert (1862 - 1943): Grundlagen der Geometrie
  - Widerspruchsfreiheit und
  - Gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome

Axiomensystem der Euklidischen Geometrie

- Axiome der Verknüpfung:
  1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
  2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
  3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

  …

- Axiome der Anordnung

- Axiom der Parallelen:
  Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.

- Axiome der Kongruenz

- Axiome der Stetigkeit

Euklidische Konstruktion

- besteht aus einem Algorithmus und einem Beweis

Algorithmus

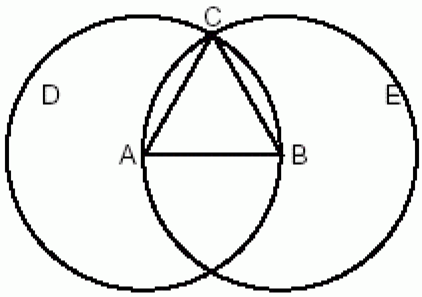
- wohldefinierte Berechnungsprozedur
- Eingabe: Wert oder Menge von Werten
- Ausgabe: Wert oder Menge von Werten
- eindeutig, korrekt, terminiert

Beispiel einer klassischen Konstruktion:

Elemente, Erstes Buch, § 1

Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten

Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck errichten.



Mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand zeichne man den Kreis BCD (Post. 3), ebenso mit B als Mittelpunkt und BA als Abstand den Kreis ACE; ferner ziehe man vom Punkte C, in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken CA, CB (Post. 1).

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist AC = AB (I, Def. 15); ebenso ist, da Punkt B Mittelpunkt des Kreises CAE ist, BC = BA. Wie oben bewiesen, ist auch CA = AB; also sind CA und CB beide = AB. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Ax. 1); also ist auch CA = CB; also sind CA, AB, BC alle drei einander gleich.

Also ist das Dreieck ABC gleichseitig (I, Def. 20); und es ist über der gegebenen Strecke AB errichtet - dies hatte man ausführen sollen.

dazugehörig:

Definitionen

15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die **Umfang (Bogen)** heißt] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind;

20. Von den dreiseitigen Figuren ist ein **gleichseitiges Dreieck** jede mit drei gleichseitigen Seiten, …

Postulate

Gefordert sein soll:

1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,

3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,

Axiome

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.

Euklidische Primitive

- Operationen, die mit Hilfe von Zirkel und Lineal ausgeführt werden
- Reichen die Euklidischen Primitive aus, um alle geometrischen Berechnungen, z.B. die Dreiteilung eines Winkels, durchzuführen?

René Descartes (1596 - 1650): Koordinaten
Emile Lemoine (1902): Géométrographie

Minimierung

- der Anzahl notwendiger Elementaroperationen
  (→ Zeitkomplexität) und
- der für eine Konstruktion notwendigen Zeichenfläche
  (→ Speicherplatzkomplexität)

Algorithmische Geometrie:
M. I. Shamos 1978: "Computational Geometry"

Aufgaben

- Entwicklung effizienter und praktikabler Algorithmen zur Lösung geometrischer Probleme
- Bestimmung der algorithmischen Komplexität geometrischer Probleme

Anwendungen

- Robotik

  z.B. Bewegungsplanung, Umgebungserkundung
- computer aided geometric design

  z.B. Berechnung von Durchschnitt / Vereinigung geometrischer Körper
- geographische Informationssysteme (GIS)

  z.B. Anfragen aus Kombinationen geometrischer Merkmale
- Computergraphik

  z.B. Sichtbarkeit / Verdeckung von 3D–Objekten

Schwerpunkte

- Algorithmische Kernprobleme

  z.B. konvexe Hülle von n Punkten in der Ebene;

  Bestimmung des nächstgelegenen von n Punkten;...
- algorithmische Techniken

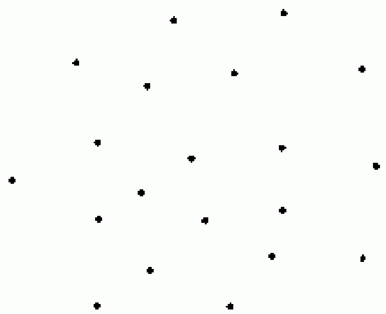
  z.B. plane sweep, divide–and–conquer, randomized incremental construction...

Typische Probleme:

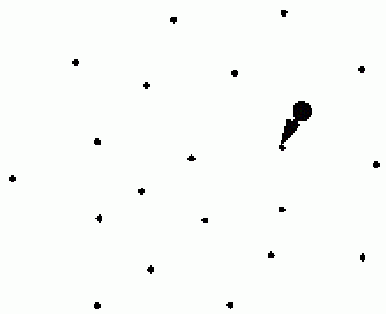
- Postamtsproblem
- Problem des Handlungsreisenden
- Bestimmung einer konvexen Hülle
- Kollisionsdetektion
- Bewegungsplanung
- ...

"Postamtsproblem":

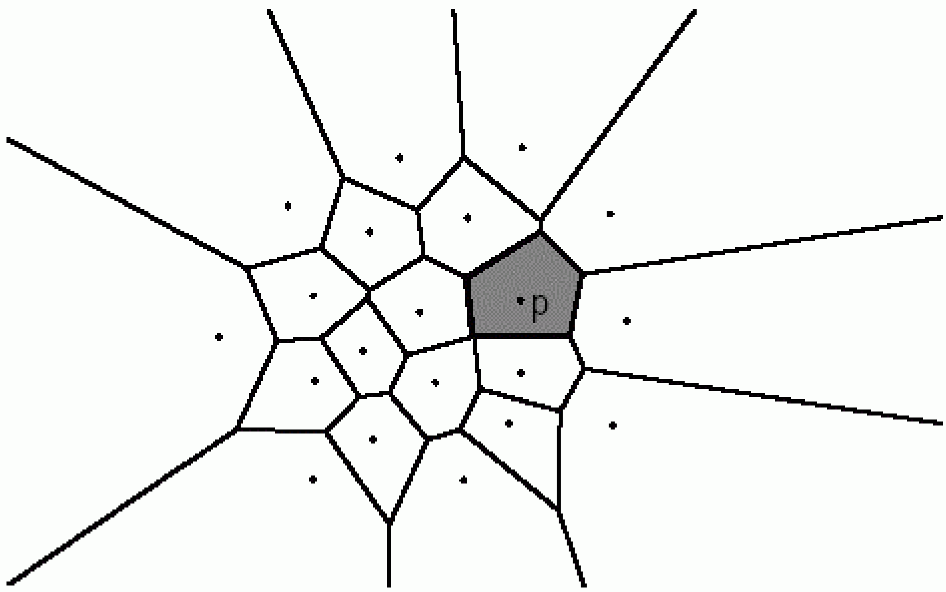
Gegeben: Menge von Postämtern



Gesucht: Das zu einem Abfragepunkt nächstgelegene Postamt



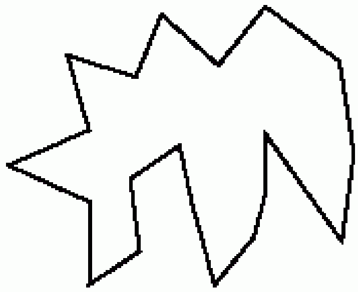
Lösung mit Hilfe des Voronoi-Diagramms:



Voronoi-Polygon V(p):

$$V(p) \quad = \bigcap_{\substack{q \in S \\ q \neq p}} H(p,q)$$

Problem des Handelsreisenden:
Finde durch eine vorgegebene Menge von Städten eine Tour, so daß jede Stadt genau einmal besucht und die Länge der Tour minimiert wird.



Problem "Bestimmung der konvexen Hülle":

(Konvexe Hülle) Gegeben n Nägel in einem Holzbrett, um die ein Gummiband herumgespannt wird. Berechne die Lage des Gummibandes, nachdem es losgelassen wurde (Abbildung 0.2).

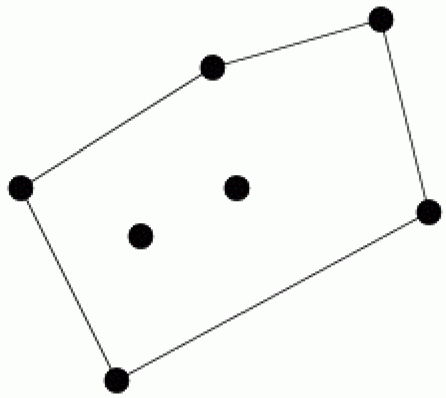


Abbildung 0.2: Die konvexe Hülle einer Punktmenge

Anwendungen der konvexen Hülle:

- Gegeben sind verschiedene Mixturen, die zwei Substanzen in verschiedenen Konzentrationen enthalten. Die Frage ist, ob ein vorgegebenes Mischungsverhältnis durch Mischung dieser Mixturen erreicht werden kann.

- Es sollen verschiedene Holzsorten automatisch erkannt werden. Hierzu mißt man für hinreichend viele Bretter einer Holzsorte (z. B. Eiche) zwei Parameter, etwa Maserung und Helligkeit. Anschließend trägt man die Meßwerte als Punkte in der Ebene ab und bildet die konvexe Hülle. Liegen nun die Meßwerte für eine unbekannte Holzsorte in der konvexen Hülle, so kann man davon ausgehen, daß es sich um ein Eichenbrett handelt.

- Es sollen z. B. 4 Tennisbälle so angeordnet werden, daß man mit möglichst wenig Verpackungsmaterial auskommt. Zu minimieren ist die Oberfläche der konvexen Hülle.

weitere Beispielprobleme:

Auffinden des nächsten Paares aus einer Menge von Punkten

(Nächstes Paar) Gegeben n Punkte in der Ebene, finde zwei Punkte mit kürzestem Abstand (Abbildung 0.1).

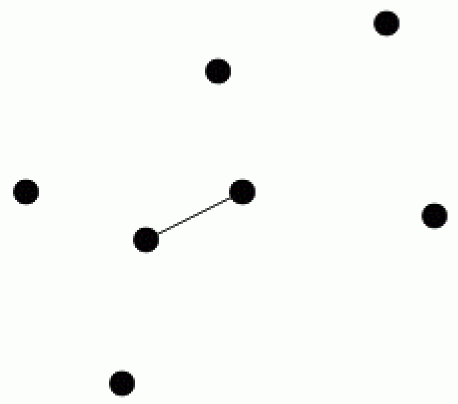


Abbildung 0.1: Problem Nächstes Paar

Auffinden des kleinsten umschließenden Kreises

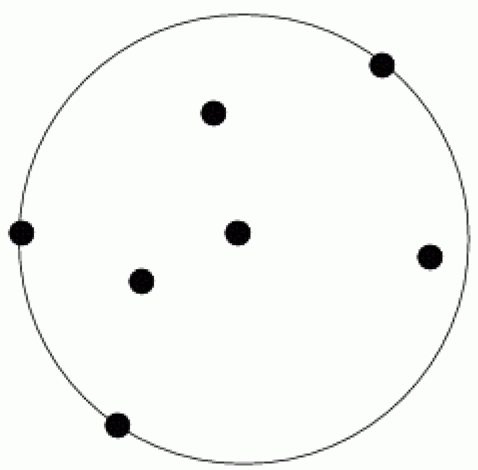


Abbildung 0.5: Kleinster umschließender Kreis

(Abb. aus Gärtner 1996)