

Seminar „Auswertung von 3D-Daten“

**Thema:**  
**The power crust**

Antje Christan

[achrista@informatik.tu-cottbus.de](mailto:achrista@informatik.tu-cottbus.de)

03.12.2002

1. Einleitung
2. Geometrische Definitionen
  - 2.1. Mittelachsentransformation
  - 2.2. Voronoi-Diagramm
  - 2.3. Power-Diagramm
3. Konstruktionen
  - 3.1. Beispielannahmen
  - 3.2. Pole
  - 3.3. Power Crust
  - 3.4. Power Shape
4. Theorie
5. Algorithmus
  - 5.1. Auswahl der Pole
  - 5.2. Beschriftungsalgorithmus
6. Auslassen einzelner Pole
  - 6.1. Störungen
  - 6.2. Scharfe Ecken
7. Zusätze
  - 7.1. Löcher
  - 7.2. Approximation einer Offset-Oberfläche
  - 7.3. Vereinfachung der Mittelachse
8. Ausgaben

## 1. Einleitung

*Allgemein:*

- die Power Crust ist eine Konstruktion zur Oberflächenrekonstruktion von dreidimensionalen Objekten  
→ sie basiert auf der Mittelachsentransformation (*medial axis transform*, kurz MAT)
- dabei wird aus einer Probe von Punkten von einer Oberfläche eines dreidimensionalen Objektes ein Oberflächennetz und eine approximierte Mittelachse erstellt
- zur Oberflächendarstellung nutzt man dann die inverse Transformation der MAT

Idee: Konstruktion eines einfachen Algorithmus für die Oberflächenrekonstruktion, wobei das Ergebnis nicht von der Qualität der Eingabepunkte abhängen soll

→ jede Eingabe ergibt eine Ausgabeoberfläche, die einem „wasserdichten“ Rand eines dreidimensionalen Objektes gleicht

- dieses feste Objekt wird durch die Mittelachsentransformation beschrieben
  - sind keine Nachbearbeitungsschritte mehr notwendig, im Gegensatz zu anderen Oberflächenrekonstruktions-Algorithmien
- mit diesem Algorithmus kann man nun Objekte handhaben, bei denen es z.B. sehr wenige Eingabepunkte gibt.

- der Power Crust Algorithmus wurde von Nina Amenta, Sunghee Choi und Ravi Krishna Kolluri entwickelt
- hat man von einer Oberfläche Eingabepunkte  $S$  gegeben, so konstruiert der Algorithmus stückweise linear die Approximation der Oberfläche und auch der MAT
  - als erstes werden die Eingabepunkte zur Konstruktion der MAT benutzt
  - die erstellte MAT wird dann invertiert, um eine stückweise lineare Approximation der Oberfläche zu erzeugen
- die Hauptwerkzeuge sind dabei das Voronoi-Diagramm und eine Art gewichtetes Voronoi-Diagramm, das Power-Diagramm



Abb. 1:

- Laserauswahldaten
- das rekonstruierte „wasserdichte“ Polygonmodell
- die vereinfachte Mittelachse

### *Oberflächenrekonstruktion:*

- die Oberflächenrekonstruktion wird in zunehmendem Maße bei der geometrischen Modellierung von Datenpunkten wichtig  
→ die Datenpunkte werden dabei von einem realen Objekt, z.B. durch Scanner, aufgezeichnet
- schon in der frühen Computergraphik traf man auf das Problem der Oberflächenrekonstruktion
- hierzu gibt es eine Vielzahl von Algorithmen
- der Power Crust Algorithmus ist einigen anderen Algorithmen ähnlich, welche eine Variante von Delaunay-Tetraedern der Eingabemenge  $S$  als das Innere eines Körpers darstellen
- mit Hilfe des Power-Diagramms ist es nun möglich, Mehrdeutigkeiten zu eliminieren

### *Mittelachsenkonstruktion und Approximation:*

- die Mittelachsentransformation liefert eine skelettartige Formdarstellung, die in verschiedenen Anwendungen für die Formerkennung und Manipulation genutzt wird
- die Berechnung der genauen MAT von einer gegebenen Oberfläche ist schwierig, und deshalb benutzt man oft eine vereinfachte, angenäherte MAT  
→ bei der Berechnung der genauen MAT eines komplizierten Objektes aus der realen Welt ist es sehr wahrscheinlich, dass ein „Überlauf“ auftritt  
→ eine einfache angenäherte MAT genügt für die Anwendungen
- hierzu gibt es verschiedene Algorithmen
  
- zur Approximation der dreidimensionalen MAT wird eine Variante des Voronoi-Diagramms – das Power-Diagramm – benutzt
- neu hierbei ist die Erstellung der Power Crust und der Power Shape

### *Vereinfachung der Mittelachsentransformation:*

- wenn am Rand der Oberfläche kleine Störungen vorhanden sind, ist die MAT instabil
- diese Störungen können große Auswirkungen auf die MAT haben
- zum Beispiel hat eine Muschel eine „holprige“ Oberfläche und die MAT wird dann zu kompliziert, um sie benutzen zu können



Abb. 2: Muschel

- Teile der Mittelachse sind instabil und andere Teile, die wichtige Objekteigenschaften ohne Störungen enthalten, sind stabil
- diese stabilen Merkmale werden dann genutzt, um eine vereinfachte Mittelachse herzustellen

### *Voronoi-Diagramm:*

- die Anwendbarkeit der Power Crust hängt von Berechnung eines dreidimensionalen Voronoi-Diagramms ab bzw. dual dazu von der Delaunay-Triangulation
- auch hier gibt es wieder verschiedene Algorithmen
- der Vorteil in der Benutzung des Voronoi-Diagramms liegt darin, dass man globale Informationen über die Form des Objektes und deren Abstandsfunktion im  $\mathbf{R}^3$  ermitteln kann
- die approximierte MAT beinhaltet diese Informationen

## 2. Geometrische Definitionen

- mit  $F$  wird der Rand des dreidimensionalen Objektes bezeichnet
- um zu verhindern, dass die Punkte unendlich werden, nimmt man an, dass  $F$  in einer beschränkten, offenen Region  $Q$  liegt
- $F$  teilt  $Q$  in ein Inneres und ein Äußeres ein

### 2.1. Mittelachsentransformation

- man stellt eine Kugel  $B = B_{c,p} \subset Q$  durch ihre Mitte  $c$  und den Radius  $p$  dar
- die Kugel ist leer (in Bezug auf  $F$ ), wenn das Innere der Kugel keine Punkte des Randes von  $F$  enthält
- eine Mittelkugel ist eine maximale leere Kugel  
→ d.h. sie ist nicht vollständig in einer anderen Kugel enthalten
- man erhält aus allen Zentren der Mittelkugeln die Mittelachse

#### Definition:

Die Mittelachsentransformierte einer Oberfläche  $F$  ist die Menge der Mittelpunkte aller Mittelkugeln mit maximalem Radius, die in ein Gebiet (Objekt) hineingelegt werden können. Die Zentren der Mittelkugeln formen die Mittelachse von  $F$ .

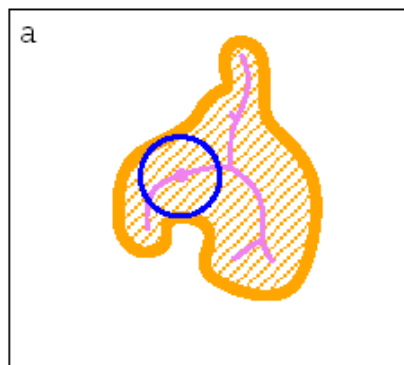


Abb. 3: ein Objekt mit seiner Mittelachse und einer maximalen Kugel

- d.h.: eine Mittelkugel berührt wenigstens zwei Punkte der Oberfläche und ist vollständig im Objekt enthalten
- die Vereinigung dieser Kugeln füllt das Objekt vollständig

- die Mittelachse eines dreidimensionalen Objektes ist generell eine zweidimensionale Oberfläche, aber es wird genau die Topologie des Körpers wiedergegeben  
 → Formal: die Mittelachse eines Körpers ist homotop-äquivalent zum Körper

## 2.2. Voronoi-Diagramm

- das Voronoi-Diagramm einer Menge  $S \subset Q$  von Probepunkten ist eine Einteilung von  $Q$  in Zellen  
 → jede Zelle besteht aus allen Punkten  $x \in Q$ , für die ein bestimmter Eingabepunkt  $s \in S$  nächster Nachbar ist

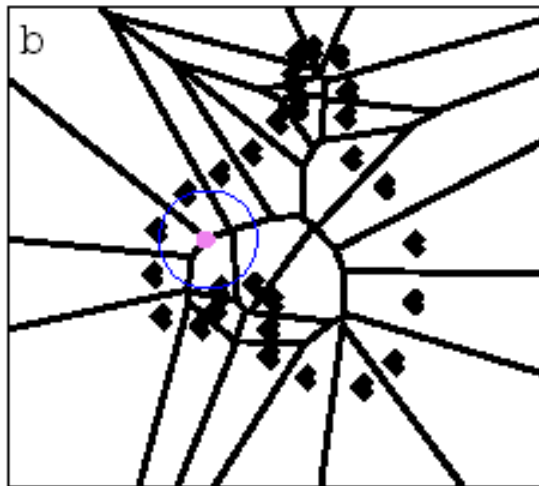


Abb. 4:  
 das Voronoi Diagramm  
 von  $S$  mit einer Voronoi-  
 Kugel um einen Voronoi-  
 Knoten

- jede Voronoi-Zelle ist ein konvexes Polygon
- die Knoten des Polygons werden Voronoi-Knoten genannt
- ein Voronoi-Knoten  $v$  im  $\mathbf{R}^3$  wird durch die Zellen von mindestens vier Probepunkten geteilt
- eine Voronoi-Kugel, zentriert um  $v$ , hat diese Probepunkte auf seinem Rand und enthält im Inneren keine Probepunkte  
 → eine Voronoi-Kugel ist eine maximale leere Kugel im Bezug auf  $S$
- liegen vier Probepunkte sehr nah auf  $F$  zusammen, so können sie eine Voronoi-Kugel erzeugen, deren Mitte sehr nah bei  $F$  liegt oder  $F$  selbst ist  
 → solch ein Voronoi-Knoten ist dual zu einem kleinen Delaunay-Tetraeder



### 2.3. Power-Diagramm

- man möchte nun die Mittelachse mit Hilfe einer endlichen Menge von Kugeln erstellen
- Nutzung des Power-Diagramms
- eine Kugel  $B_{c,p}$  wird als ein Punkt  $c$  mit dem Gewicht  $p^2$  dargestellt
- die *Power-Distanz* zwischen einem ungewichteten Punkt  $x$  im  $\mathbf{R}^3$  und  $B_{c,p}$  ist:

$$d_{\text{pow}}(x, B_{c,p}) = d^2(c, x) - p^2 \quad (\text{d ist der normale euklidische Abstand})$$

- befindet sich ein Punkt  $x$  im Inneren der Kugel  $B_{c,p}$ , dann ist die Power-Distanz  $d_{\text{pow}}$  negativ, liegt  $x$  außerhalb, dann ist  $d_{\text{pow}}$  positiv
- man benutzt nun die Power-Distanz  $d_{\text{pow}}$  zur Definition eines gewichteten Voronoi-Diagramms:
  - das Power-Diagramm ist eine Einteilung von  $Q$  in Zellen
  - jede Zelle besteht aus allen Punkten  $x \in Q$ , für die ein bestimmter Eingabepunkt  $v \in V$  nächster Nachbar bzgl. der Power-Distanz ist.

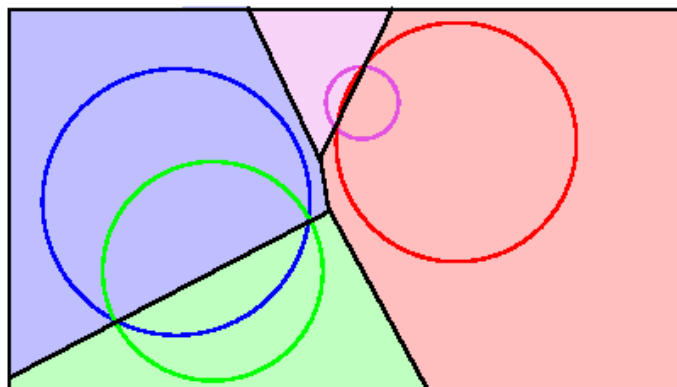


Abb. 5:

- das Power-Diagramm von vier gewichteten Punkten
- ein Punkt  $c$  mit dem Gewicht  $p^2$  wird durch eine Kugel mit dem Zentrum  $c$  und dem Radius  $p$  dargestellt

- der Vorteil bei der Verwendung der Power-Distanz, gegenüber anderen Abstandsfunktionen, liegt darin, dass man zur Berechnung des Power-Diagramms im wesentlichen den gleichen Algorithmus wie für das Voronoi-Diagramm benutzen kann.

### 3. Konstruktionen

- die Konstruktion der Pole, der Power Crust und der Power Shape basieren auf speziellen Eigenschaften des Voronoi-Diagramms  
→ Benutzung einer Menge von dichten Punkten, die auf der Oberfläche eines Objektes verteilt sind
- zur der Qualität des Algorithmus benötigt man einige Annahmen über die Qualität der Eingabepunkte  $S$  in Bezug auf die Oberfläche  $F$
- aber: häufig wird in der Praxis der Algorithmus so implementiert, dass dieser auch noch gute Ergebnisse liefert, wenn die folgenden Annahmen nicht getroffen wurden

#### 3.1. *Annahmen über die Probepunkte*

- man nimmt für die Analyse an, dass die Oberfläche  $F$  glatt und ohne Abgrenzung ist
- die Annahme über die Dichte der Probepunkte von  $S$  ist folgende:

#### **Definition:**

Die *lokale Merkmalsgrößenfunktion* (local feature size function),  $LFS(x)$ , ist der minimale euklidische Abstand vom Punkt  $x$  zu einem anderen Punkt der Mittelachse.  $S$  ist eine  $r$ -Probe, wenn der Abstand von einem Punkt  $x \in F$  zur nächsten Probe höchstens  $r \cdot LFS(x)$  ist.

- hier dient  $LFS(x)$  als ein lokales Maß für die „Ebene des Details“ von  $F$
- wenn  $F$  glatt ist, dann ist der Abstand von einem Punkt zur Mittelachse immer größer als null

### 3.2. Pole

- hier wird die Auswahl von Polen zur Approximation der Mittelachse genutzt
- Pole sind eine Variante der Voronoi-Knoten

#### Definition:

Die *Pole* eines Probenpunkts  $s \in S$  sind die entferntesten Knoten der Voronoi-Zelle im Inneren von  $F$  und die entferntesten Knoten der Voronoi-Zelle im Äußeren von  $F$ .

$V$  ist die Menge der Pole für alle  $s \in S$ .

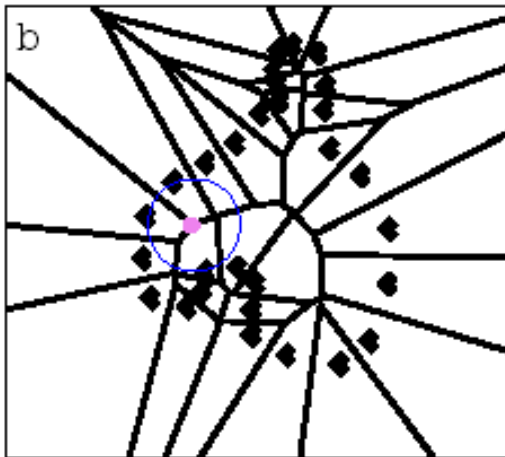


Abb. 6

- wenn  $S$  eine dichte Probe ist, schließt die Menge  $V$  von Polen die Voronoi-Knoten aus, die nah an  $F$  liegen  
→ so formen die Pole eine gute Schätzung der Mittelachse
- jeder Pol  $v$  ist die Mitte einer Polarkugel
- die Menge von Polarkugeln ergibt eine gute Annäherung der Mittelachsentransformation:
  - o die Approximation der MAT erfolgt durch die Vereinigung der endlichen Menge von Polarkugeln
- die Polarkugeln mit entsprechenden Polen im Inneren von  $F$  bilden die Menge innerer Polarkugeln, äußere Pole werden analog definiert

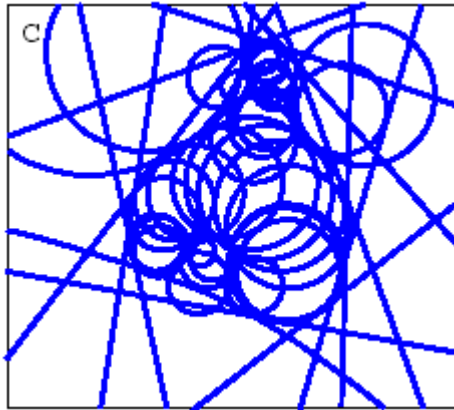


Abb. 7:  
die inneren und  
äußeren Polarkugeln

- die Vereinigung der inneren Polarkugeln formt eine gute Approximation des Objekts, beschränkt durch  $F$
- auf die gleiche Weise formt die Vereinigung der äußeren Polarkugeln eine gute Approximation des Komplements des Objekts

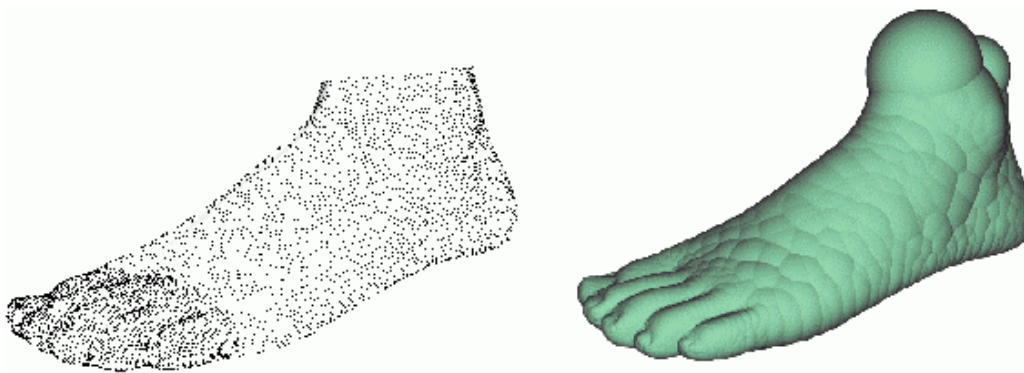
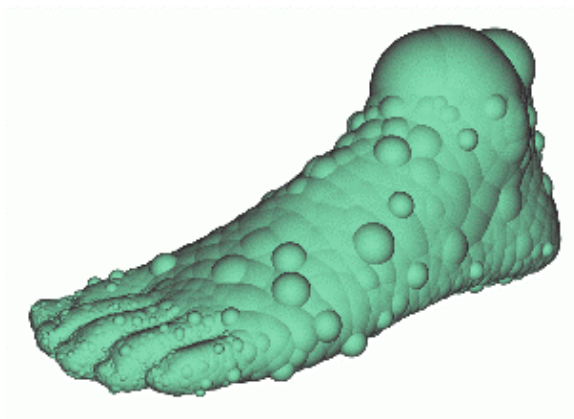


Abb. 8:

- links: Probepunkte von einer Oberfläche eines Fußes
- rechts: die Vereinigung der Menge von inneren Polarkugeln



die Vereinigung von allen Voronoi-Kugeln

⇒ die Vereinigung von Polarkugeln formt eine viel bessere Approximation der MAT

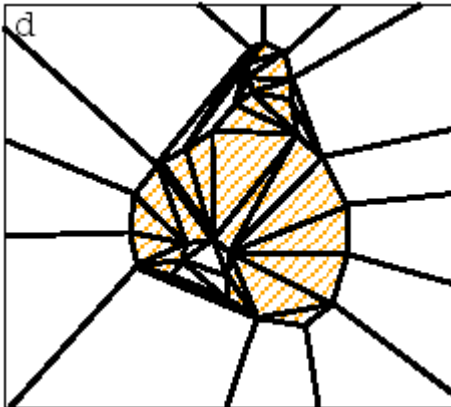


Abb. 9:  
die Power-Diagramm-Zellen der Pole, gekennzeichnet als "innen" und "außen"

### 3.3. *Power Crust*

#### **Definition:**

Die *Power Crust* ist der Rand zwischen den Power Diagramm-Zellen, die zu den inneren Polen gehören, und den Power Diagramm-Zellen, die zu den zugehörigen äußeren Polen gehören.

- zur Unterscheidung von inneren und äußeren Polarkugeln nutzt man die Erkenntnis, dass zwei Polarkugeln sich nur wenig schneiden, wenn die eine im Innern des Objektes liegt und die andere im Äußeren
- die Oberfläche der *Power Crust* liegt in der Nähe des Randes von beiden Vereinigungen der Kugeln
- liegt folglich nah am Rand F des Objektes

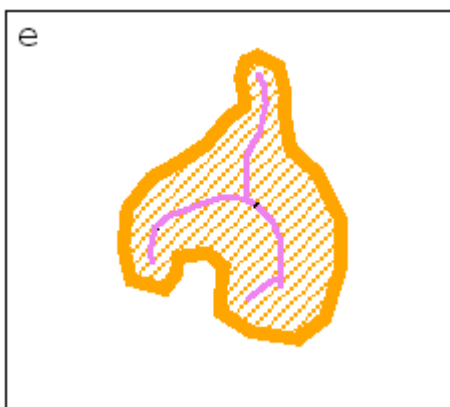


Abb. 10:  
die Power Crust (orange)  
die Power Shape (lila)

### 3.4. *Power Shape*

- die Definition der Power Crust bezieht einen Weg für die Verbindung der Pole zu einer topologisch korrekten Approximation der Mittelachse mit ein  
→ die Mittelachse wird als ein "simplicialer Komplex"  $M$  dargestellt, welchen man Power Shape nennt
- die Knoten von  $M$  sind die Pole selbst
- innere Pole, dessen Zellen im Power Diagramm benachbart sind, werden durch „Simplizes“ in  $M$  verbunden, genau so wie benachbarte äußere Pole
- die Power Shape ist eine Variante von gewichteten Delaunay-Triangulationen (auch als reguläre Triangulation bekannt)
- da die Mittelachse von  $F$  eine zweidimensionale Oberfläche ist, enthält die Power Shape auch sehr flache Tetraeder.

## 4. Theorie

- hier werden einige Lemmas für die Analyse vorgestellt, welche sehr nützlich für die Entwicklung einer stabilen Implementation sind  
→ für den Fall, das die Annahmen über die Proben nicht ausreichend sind
- eine Schlüsselidee für den Algorithmus ist, dass, wenn die Probepunkte eine ausreichende Dichte besitzen, die Voronoi-Zellen von einem Probepunkt lang, dünn und senkrecht zur Oberfläche  $F$  sind.

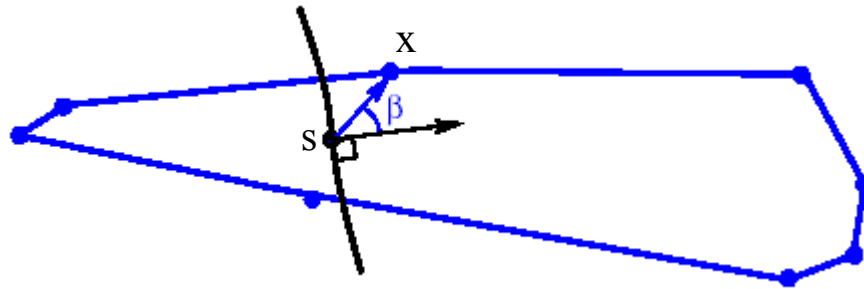


Abb. 11:

- die Voronoi-Zelle einer Probe  $s$  ist lang, dünn und senkrecht zu Oberfläche
- die „Dünnheit“ wird durch das folgende Lemma formalisiert  
 → je größer der Winkel  $\beta$  von der Senkrechten zum Vektor  $sx$  ist, um so näher liegt  $x$  an  $s$
- zur Bequemlichkeit schreibt man:

$$r' = \frac{r}{(1-r)} = O(r) \quad r \text{ ist der Abstand zwischen den Probepunkten}$$

**Lemma 1:**

$S$  ist eine  $r$ -Probe von einer glatten Oberfläche  $F$ , für ein genügend kleines  $r$ . Gilt für ein  $x$ ,  $\beta > \arcsin r'$ , dann ist  $d(s,x) \leq kLFS(s)$ ,

mit  $k = \frac{r'}{\sin(\beta - \arcsin r')}$ .

- die Idee, dass die Voronoi-Zelle lang sein muss, wird in dem nächsten Lemma formalisiert

**Lemma 2:**

Der Abstand zu jedem Pol eines Probepunktes  $s$  ist höchstens  $LFS(s)$ .

- eine andere Schlüsselidee ist: Wenn  $S$  eine  $r$ -Probe ist, dann ist jede innere Polarkugel fast vollständig im Inneren des Körpers enthalten und jede äußere Polarkugel fast vollständig im Äußeren
- das folgende Lemma formalisiert diese Idee

**Lemma 3:**

$S$  ist eine  $r$ -Probe von einer glatten Oberfläche  $F$ , für ein genügend kleines  $r$ . Der Winkel  $\alpha$ , der sich ergibt, wenn eine innere und eine äußere Polarkugel sich schneiden, ist  $O(r)$ .



Abb. 12:

- o der Winkel  $\alpha$  gibt die Tiefe des Schnittpunktes der Polarkugeln an
- eine innere Polarkugel und eine äußere Polarkugel schneiden sich nur wenig

## 5. Algorithmus

- der grundlegende Algorithmus ist eine direkte Reflektion der Strategie:
  - o als erstes wird die MAT abgeschätzt, und man verwendet sie dann, um die Oberfläche zu definieren



*Algorithmus:*

1. Man berechnet das Voronoi-Diagramm von den Probepunkten  $S$ .
2. Für jeden Probepunkt werden dessen Pole berechnet.
3. Berechnung des Power-Diagramms der Pole.
4. Beschriftung jeden Pols mit "innen" oder "außen".
5. Ausgabe des Power-Diagramms, getrennt in die Zellen der inneren und äußeren Pole, als Power Crust.
6. Ausgabe der regulären Triangulation, mit Verbindung der inneren und äußeren Pole, als die Power Shape.

### ***5.1. Auswahl der Pole***

- für jeden Probepunkt  $s \in S$  sucht man den am weitesten entfernten Voronoi-Knoten  $p_1$ , welcher der erste Pol von  $s$  wird
- man findet den zweiten am weitesten entfernten Voronoi-Knoten  $p_2$  so, dass die Vektoren  $sp_1$  und  $sp_2$  ein negatives Skalarprodukt haben
- ist  $F$  eine  $r$ -Probe für ein genügend kleines  $r$ , dann sind  $p_1$  und  $p_2$  in der Tat die weitesten Voronoi-Knoten von  $s$

### ***5.2. Beschriftungsalgorithmus***

- als erstes berechnet man das Power-Diagramm für alle Polarkugeln  
→ dabei werden die Pole mit "Innen" oder "Außen" beschriftet
- unter der Benutzung der vorhin genannten Lemmas kann man einen Pseudo-Code für den Beschriftungsalgorithmus angeben:

```

Label_Poles() {
  For all poles  $p$ ,
    initialize  $in(p) = out(p) = 0$ .
    insert  $p$  in the queue.
  For each pole  $p$  adjacent to points of  $Z$ ,
     $out(p) = 1$ .
    Update_Priority( $p$ )
  while (queue is not empty) {
    Remove the top element  $p$  of the priority queue
    If  $in(p) > out(p)$ ,  $label(p) = in$ ,  $tmp(p) = in(p)$ 
    Otherwise,  $label(p) = out$ ,  $tmp(p) = out(p)$ 
    For each sample  $s$  of which  $p$  is the pole,
      let  $q$  be the other pole of  $s$ ,
       $opp(label(p))(q) = max(tmp(p) * w_{pq}, opp(label(p))(q))$ 
      /*  $opp(in) = out$ ,  $opp(out) = in$ ,  $w_{pq} = -\cos(\angle psq)$  */
      Update_Priority( $q$ )
    For each deeply intersecting neighboring poles  $q$ ,
       $(label(p))(q) = max(tmp(p) * w_{pq}, (label(p))(q))$ 
      /*  $w_{pq} = -\cos(\alpha)$ ,  $\alpha$  is angle between balls  $p$  and  $q$  */
      Update_Priority( $q$ )
    }
  }

Update_Priority(pole  $p$ ) {
  If  $in(p) > 0$  and  $out(p) > 0$ ,  $pri(p) = |in(p) - out(p)| - 1$ .
  Otherwise,  $pri(p) = max(in(p), out(p))$ .
}

```

Abb. 13:

o Pseudocode des Beschriftungsalgorithmus

- jede Kugel kann zwei Werte annehmen:  
„in“ oder „out“, welche zwischen 0 (unbekannt) und 1 (sicher) liegen
- man beginnt mit der Initialisierung von allen Polen mit den Werten  $in / out = 0$
- alle Pole, die nah am Rand des Objektes liegen, bekommen den out-Wert 1
- alle unbeschrifteten Pole werden in eine Prioritäts-Warteschlange gelegt
- die Priorität richtet sich nach den  $in / out$  Werten  
→ je größer der Wert, um so höhere Priorität

- solange die Warteschlange nicht leer ist, wird das oberste Element entfernt und bekommt eine Beschriftung
  - o ist der Wert von  $\text{in}(p)$  größer als der Wert von  $\text{out}(p)$ , so bekommt  $p$  die Beschriftung "in"
  - o ist der Wert von  $\text{in}(p)$  kleiner als der Wert von  $\text{out}(p)$ , so bekommt  $p$  die Beschriftung "out"
- für jede Probe  $s$ , von der  $p$  der Pol ist, wird nun der andere Pol  $q$  ermittelt
- danach wird die Priorität in der Warteschlange aktualisiert
- für sich stark schneidende benachbarte Pole wird der Winkel  $\alpha$  zwischen den Kugeln  $p$  und  $q$  ermittelt
  - o je tiefer der Schnitt von zwei Kugeln ist, um so wahrscheinlicher ist es, dass  $q$  dieselbe Beschriftung wie  $p$  erhält (siehe Lemma 3)
- Aktualisierung der Warteschlange
- gibt es nun Pole, deren Werte von in und out beide 1 sind, dann sind dies „konfuse“ Pole
  - o deren Priorität wird auf  $|\text{in} - \text{out}| - 1$  gesetzt, was zwischen 0 und  $-1$  liegt
  - o man wird versuchen, solche Pole so spät wie möglich zu beschriften
- eine zugewiesene Beschriftung kann sich nicht mehr ändern

## 6. Auslassen einzelner Pole

- die Qualität der Power Crust hängt davon ab, wie gut die Polarkugeln die MAT approximieren
- ist die Oberfläche  $F$  nicht glatt oder die Probepunkte  $S$  sind zu wenig, dann schlägt die Benutzung des Lemma 1 fehl
  - man kann das Verfahren der Pole nicht benutzen und die Approximation der MAT wird sehr schlecht
- ermittelt man den Ausfall von Lemma 1 und lässt die Pole der „schlecht geformten“ Voronoi-Zellen weg, so bekommt man eine Approximation von Teilen der MAT
  - auch die Berechnung der Power Crust von diesen Teilen der MAT liefert gute Modelle

## 6.1. Störungen

- eine Ursache, warum Lemma 1 fehlschlagen kann, sind Störungen in den Daten  
→ z.B.: große Abstände zwischen Proben auf der Oberfläche

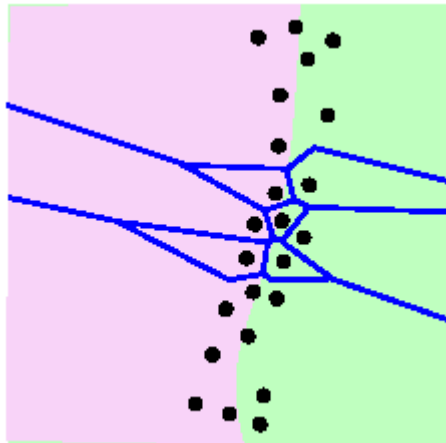


Abb. 14:  
einige Voronoi- Zellen sind annähernd rund und andere dehnen sich lang und senkrecht auf einer Seite der Oberfläche aus, aber nicht auf der anderen

- diese Art von Störung ist typisch, wenn mehrere Laserscans kombiniert werden  
→ während einzelne Scanner saubere Ergebnisse liefern, bewirkt eine Kombination von mehreren Scans, dass die Probepunkte zerstreut auf der Oberfläche liegen

- gibt man eine benutzerdefinierte Schätzung  $\lambda$  von  $r'$  an, so bekommt man eine untere Schranke von  $LFS(s)$  durch die Auswertung der folgenden „Dünnheitsformel“ für jeden Voronoi- Knoten  $x$ :

$$LFS(s) \geq \min_{\text{Knoten } x} \frac{d(s,x)\sin(\beta-\lambda)}{\lambda}$$

- übereinstimmend mit Lemma 2 gilt für einen Pol  $p$ :

$$d(s,p) \geq LFS(s)$$

- wenn der Abstand von einem Pol zu  $s$  diese untere Schranke verletzt, dann ist die Voronoi-Zelle an dieser Seite der Oberfläche unförmig, und man kann die Pole nicht benutzen

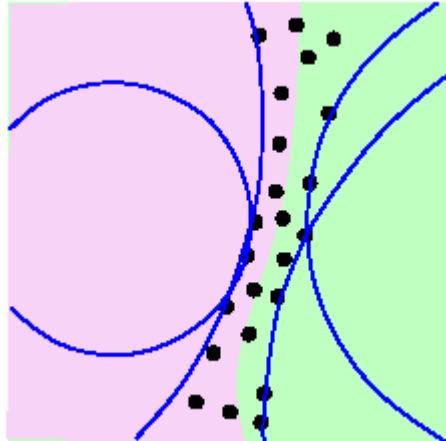


Abb. 15:

- in diesem Fall liegt die Power Crust nah an den Probepunkten, enthält sie aber nicht notwendigerweise
- da man ein „wasserdichtes“ Modell von der Power Crust erhält, auch wenn diese Störungen enthalten sind, wird nicht die optimale Rekonstruktion, die auf allen Daten basiert, hergestellt

## **6.2. Scharfe Ecken**

- in der Nähe von scharfen Ecken schlägt der oben genannte „Dünnheitstest“ bei den Polen im Inneren der Ecke fehl
- lässt man die Pole an der inneren Seite der Ecke weg, dann droht die Power Crust "einzustürzen", und die Ecke wird abgerundet
- gibt nun der Benutzer an, dass das Modell scharfe Ecken enthält, so werden beide Pole  $p_1$  und  $p_2$  bei einer Probe weggeworfen, wenn bei ihnen der „Dünnheitstest“ nicht funktioniert
- in der Nähe der weggeworfenen Pole verlängern sich die Seiten der Power Crust durch die lineare Verlängerung der angrenzenden glatten Oberfläche in die leere Region, bis sie in einem scharfen Winkel zusammentreffen

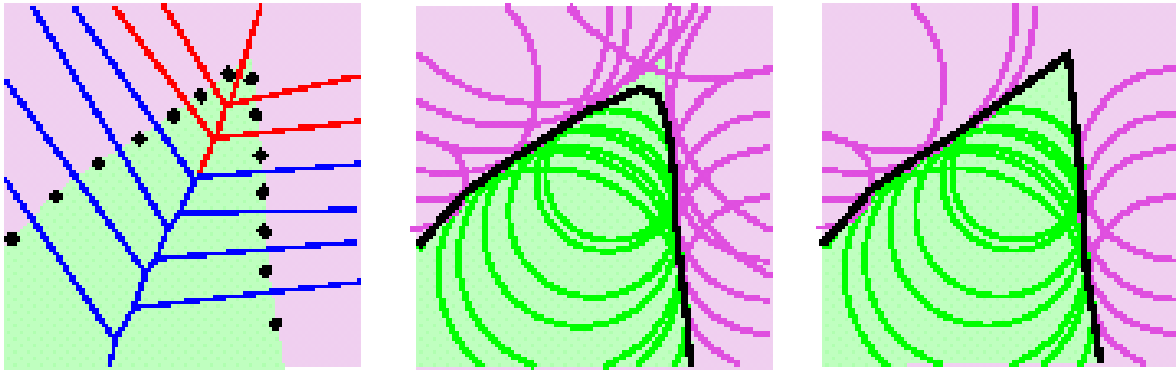


Abb. 16:

- Links: eine Ecke
- Mitte: die dazugehörigen inneren und äußeren Pole, die Ecke ist dabei aber abgerundet
- Rechts: durch Weglassen der entsprechenden Pole entsteht die Ecke

→ eine scharfe Ecke kann rekonstruiert werden, obwohl keine Probestpunkte an der Ecke selbst vorhanden sind

## 7. Zusätze

### 7.1. Löcher

- man möchte aber auch Oberflächen rekonstruieren, die keine geschlossene Form haben
- sind aber kleine Löcher in den Daten vorhanden, so sollen diese gefüllt werden

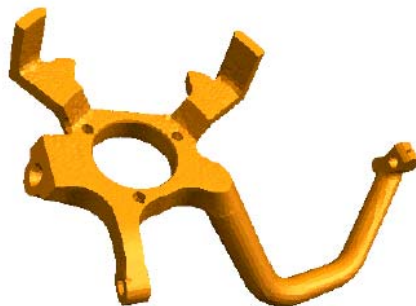


Abb. 18

- zur Charakterisierung von Löchern wird das Lemma 3 benutzt

- an einem Loch können sich die inneren Polarkugeln nach außen wölben und äußere Polarkugeln wölben sich nach innen

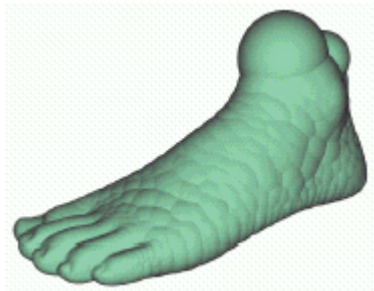


Abb. 19:

- Vereinigung von inneren Polarkugeln
  - an dem Loch wölben sich die Polarkugeln sehr stark nach außen
- enthält eine Power Crust-Seite ein Loch, so wird dieses durch ein Paar von sich stark schneidenden Polarkugeln gefüllt, bei dem eine Kugel aus dem Inneren und eine Kugel aus dem Äußeren stammt
  - scheidet sich das Paar der Kugeln sehr stark, so kann man wählen, ob man die Seite der Power Crust weglässt

## 7.2. *Approximation einer Offset-Oberfläche*

- eine  $\varepsilon$ -Offset-Oberfläche von  $F$  ist eine Oberfläche  $F'$ , die durch die Punkte  $x$  geformt wird, bei denen der Abstand von  $x$  zu dem nächstgelegenen Punkt der Oberfläche  $F$  genau  $\varepsilon$  ist
- für jedes  $\varepsilon$  gibt es eine innere und einer äußere Offset-Oberfläche von  $F$
- die innere Offset-Oberfläche wird geformt durch die Addition von  $\varepsilon$  zum Radius von jeder Kugel im Äußeren der MAT
- subtrahiert man  $\varepsilon$  von jeder Kugel im Inneren der MAT, so erhält man die äußere Offset-Oberfläche



Abb. 20:

- eine Approximation der inneren Offset-Oberfläche
  - die transparente, gelbe Oberfläche ist die Originaloberfläche
- die Berechnung der genauen Offset-Oberfläche ist schwierig, da sich Teile von der Topologie von  $F$  unterscheiden können
  - wird  $F$  durch eine Approximation der MAT repräsentiert, dann kann man eine Approximation der inneren Offset-Oberfläche konstruieren, indem man die Radien von jeder inneren Polarkugel zu  $\varepsilon$  hinzunimmt
    - die Berechnung der Power Crust erfolgt dann wie immer
    - man bekommt wieder eine „wasserdichte“ Oberfläche von einem Körper

### 7.3. Vereinfachung der Mittelachse

- Power Shape reflektiert genau die Topologie der Power Crust
  - sie ist soweit geometrisch korrekt, dass man von ihr eine genaue Rekonstruktion der Oberfläche erstellen kann
  - dabei erstellt man von der Power Shape die inverse Transformation



- aber die Power Shape, wie die Mittelachse, kann in einem dreidimensionalen Objekt kompliziert sein
  - kleine Störungen auf der Oberfläche können große „Spitzen“ auf der Mittelachse produzieren
- eine Vereinfachung der Mittelachse benutzt nur die stabilen Merkmale, die eine Form kennzeichnen
  - dies kann nützlicher sein als die Anerkennung von „schwachen“ Merkmalen oder einer Formaufspaltung
- man nimmt an, dass die Position von jedem Oberflächenpunkt höchstens durch den Abstand  $\varepsilon$  von seiner „wahren“ Position abweicht
  - $\varepsilon$  repräsentiert die Störungsebene
- man klassifiziert einen Punkt  $p$  auf der Mittelachse als stabil oder instabil in Bezug auf  $\varepsilon$  durch die Untersuchung der Mittelkugeln  $B$  mit dem Zentrum  $p$
- wenn alle Punkte, an denen  $B$  die Oberfläche berührt, nur den Abstand  $\varepsilon$  zueinander haben, das ist klar, dass sie mit ihrer „wahren“ Position übereinstimmen
  - $B$  verschwindet in diesem Fall und  $p$  ist instabil
- $p$  ist auf jeden Fall instabil, wenn der Durchmesser von  $B$  kleiner als  $\varepsilon$  ist
- aber:  $p$  kann auch instabil sein, wenn der Durchmesser von  $B$  sehr groß ist

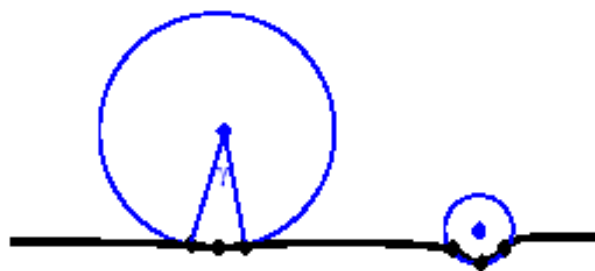


Abb. 21:

- die Kugel ist zwar groß, aber der maximale Winkel  $\gamma$ , der von den Punkten aufgespannt wird, die die Oberfläche berühren, ist klein
- kleine Oberflächenunruhen ergeben eine Kugel mit kleinem Durchmesser und großem Winkel  $\gamma$

- Eliminierung von instabilen Polarkugeln:
    - für jeden Punkt  $p$  ist  $S_p$  die Menge der Probepunkte der Oberfläche, die Polarkugeln sind
    - $d_p$  ist der maximale Abstand zwischen zwei Proben in  $S_p$
    - man entfernt  $p$ , wenn  $d_p < \epsilon$  ist
  - auch nach der Entfernung von instabilen Merkmalen kann die Power Shape noch redundant sein
  - man versucht diese Redundanz zu entfernen, indem man alle überflüssigen Pole entfernt, solange die Genauigkeit der restlichen Polarkugeln zur Darstellung des Objektes ausreicht
  - Eliminierung von redundanten Polarkugeln:
    - man sortiert die Kugeln nach ihrem Radius und ordnet sie der Größe nach an (von der größten zur kleinsten)
    - für jede Kugel  $B_{c,p}$  betrachtet man alle Nachbarkugeln  $B_{q,r}$  in der Power Shape, für die  $p > r$  gilt
    - man entfernt  $B_{q,r}$ , wenn  $B_{q,r}$  in einer etwas größeren Kugel  $B_{c,p+\delta}$  enthalten ist
- danach wird das Power-Diagramm für die übrig gebliebenen Kugeln neu berechnet

## 8. Ausgaben

- der Power Crust-Algorithmus wurde an bekannten Beispielen getestet
- meistens konnte man von der Eingabe eine perfekte Oberflächenrekonstruktion erstellen, die keine Nachbearbeitung benötigte
- allerdings musste man des Öfteren benutzerspezifische Parameter angeben, damit z.B. die scharfen Ecken erkannt wurden
- da jede Power Crust-Ausgabe garantiert, ein Rand eines festen Körpers zu sein, waren alle Ausgaben reguläre Körper
- Löcher in den Daten kann man passend füllen

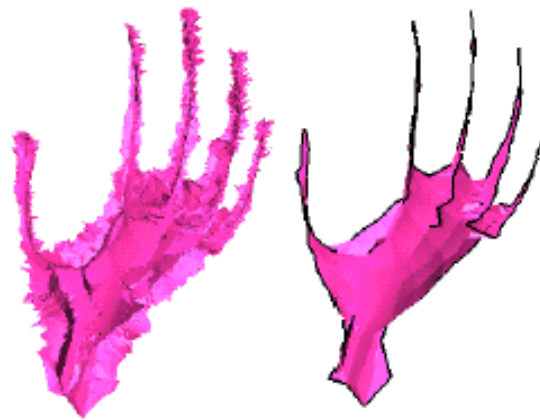


Abb. 22:

- die Power Shape eines Original-Handmodells und ihre Vereinfachung mit 352985 Probepunkten und 7805 Seiten

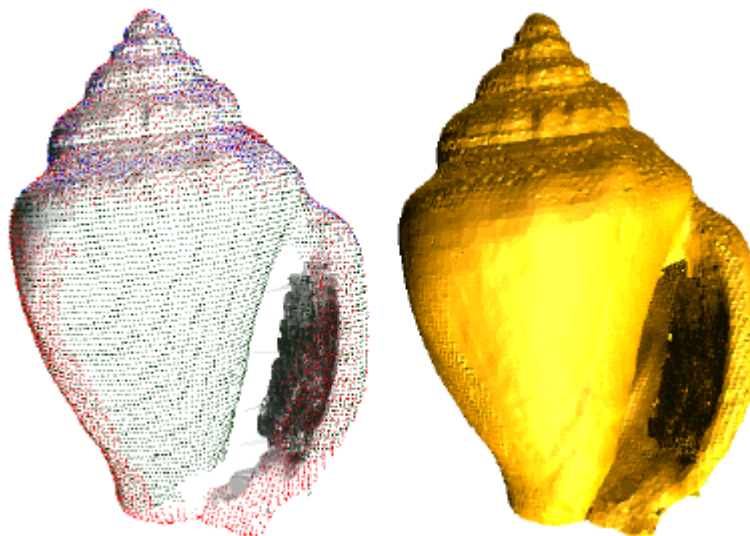


Abb. 23:

- eine Rekonstruktion von vier verschiedenen Scannern mit 37073 Probepunkten

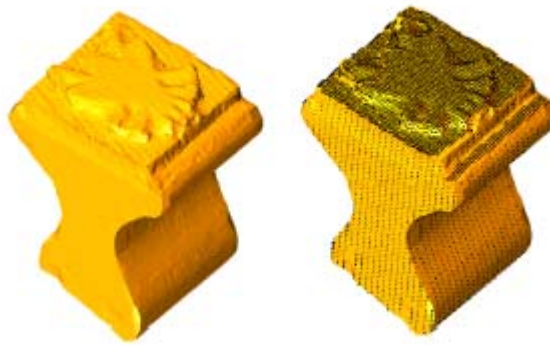


Abb. 24:

- Modell eines Stempels und die wenigen Laserauswahldaten (9755 Punkte)
- die Ergebnisse von sechs Scannern wurden kombiniert

*Literatur:*

- Nina Amenta, Sunghee Choi and Ravi Kolluri: „The power crust“ (2001)
- <http://www.cs.utexas.edu/users/amenta>