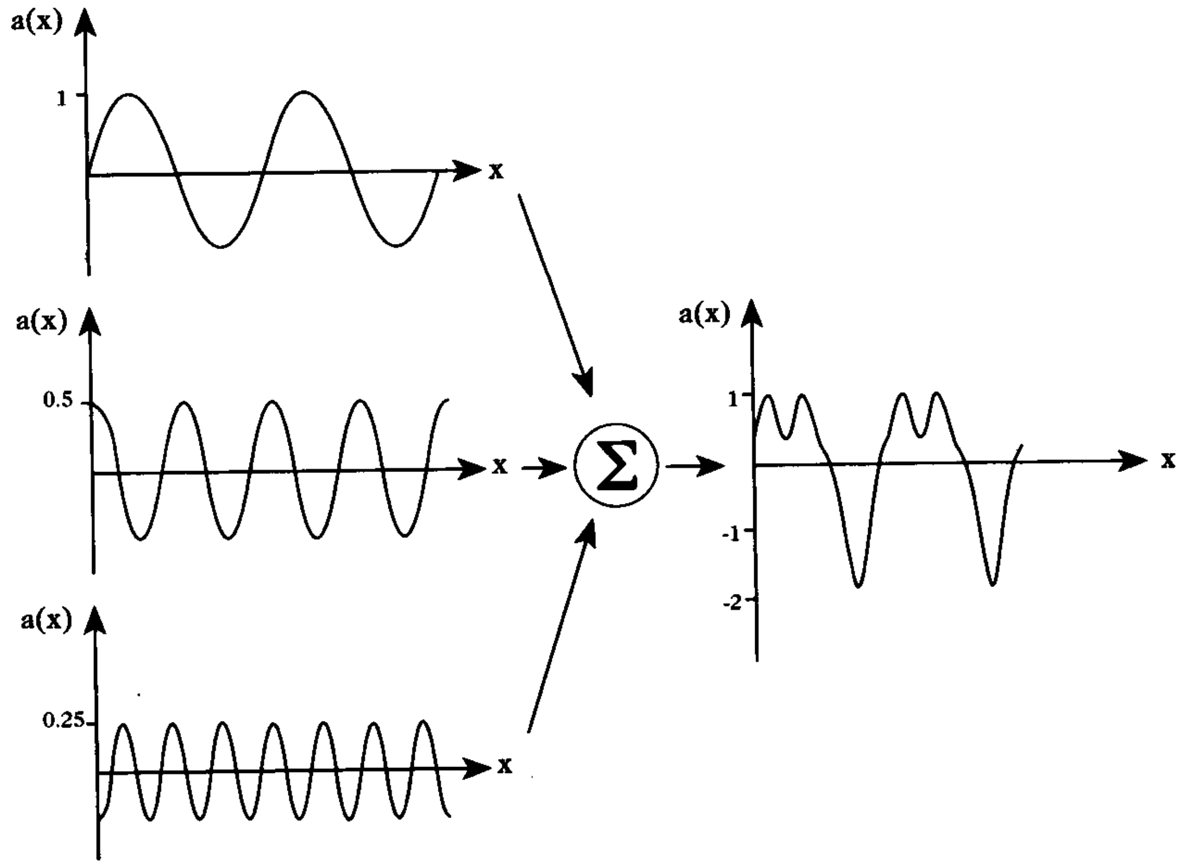
Die diskrete Fouriertransformation - Teil 2

(nach Bässmann & Kreyss 1998)

Klassische Fourieranalyse (1-dim., kontinuierliche Funktionen):

- Synthese eines kontinuierlichen Signals aus trigonometr. Basisfunktionen (Sinusschwingungen):



die Koeffizienten der Einzelschwingungen entsprechen den Frequenzen, die im synthetisierten Signal vorkommen

- Zusammenfassung von Sinus und Kosinus zur komplexen e-Funktion: $e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

- statt des Real- und Imaginärteils (cartesische Darstellung) ist es für die Koeffizienten *g* in der Fourierdarstellung suggestiver, mit Betrag und Phasenwinkel (Polarkoordinatendarstellung) zu arbeiten:

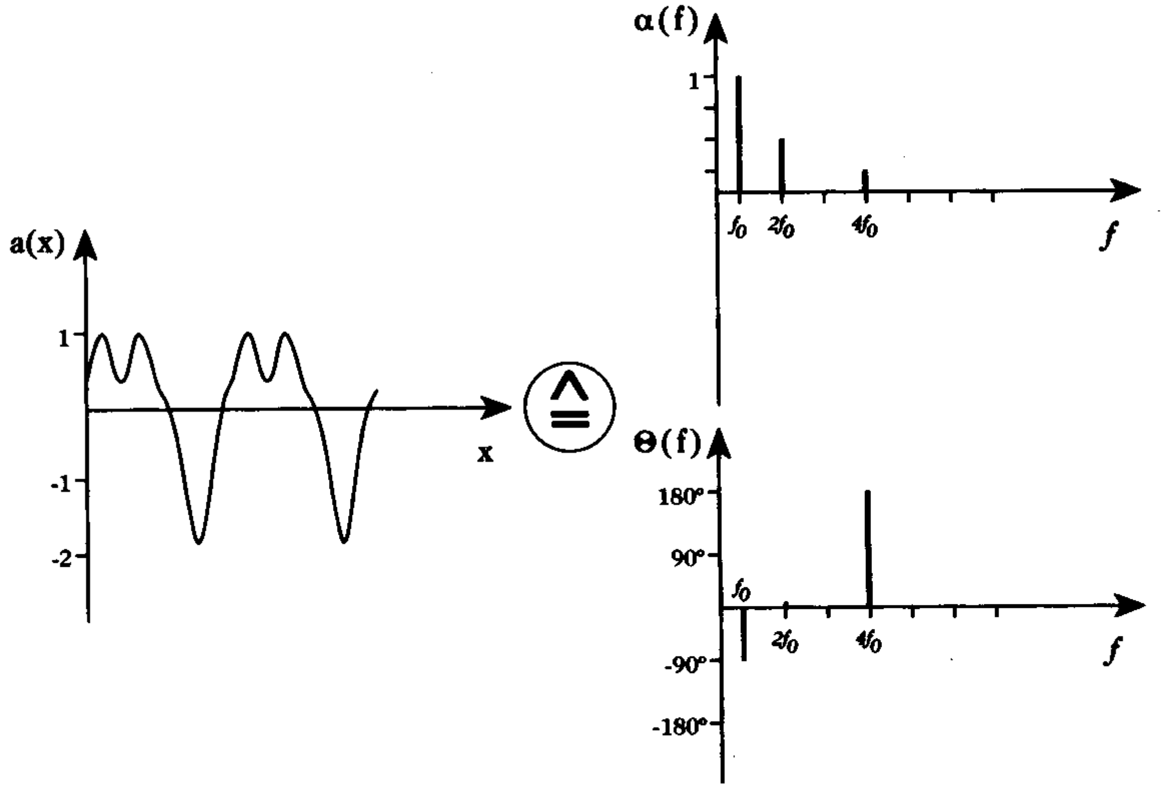
  $g = a + ib$

  Betrag: $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$

  Phasenwinkel: $\theta = \arctan \frac{b}{a}$

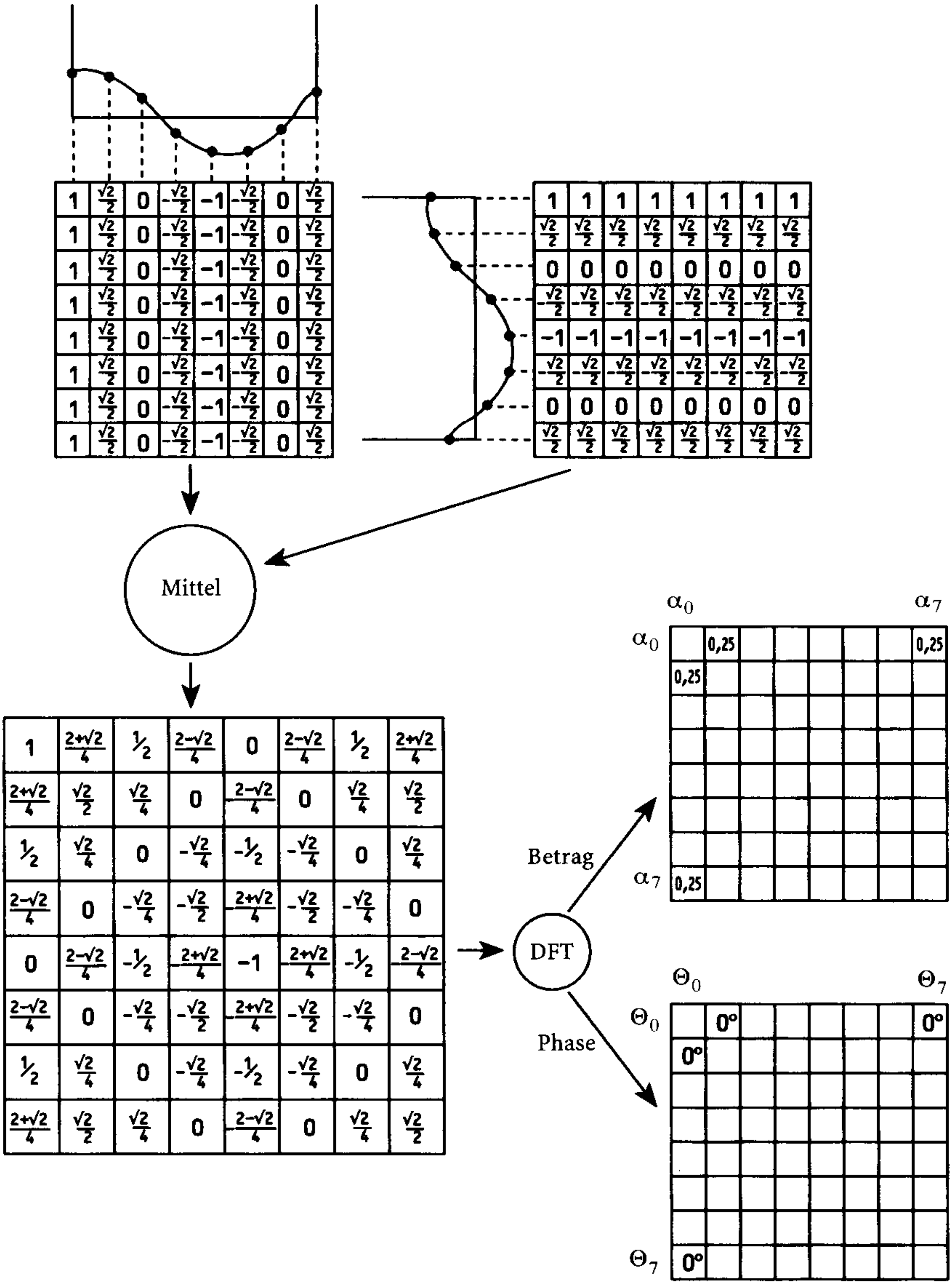
  (Transformation cartesisch $\rightarrow$ polar, *Cart/Pol*)

Die Darstellung im Frequenzbereich ("Spektrum") repräsentiert die Beträge und Phasen der beteiligten Sinusschwingungen direkt:



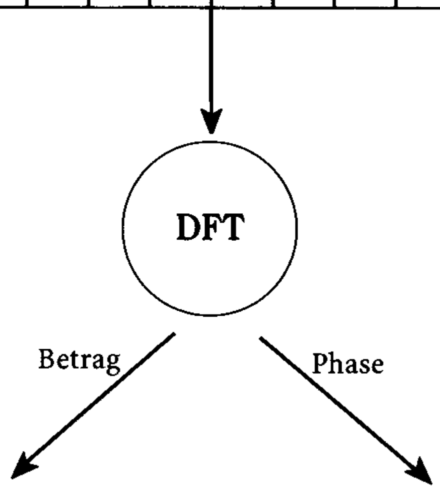
Die diskrete, 2-dim. Fouriertransformation wirkt analog. Die Koeffizienten g_{jk} können ebenfalls in Betrag und Phase umgerechnet werden.

Beispiel: 2-dim. Kosinus-Signal, entstanden durch Überlagerung zweier orthogonaler 1-dim. Kosinus-Signale



Durch 4 Einsen "gestörtes" 2-dim. Kosinussignal:

1	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$
$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0
0	$-\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	-1	$-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2-\sqrt{2}}{4}$
$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



	α_0							α_7
α_0	0.063	0.25	0.063		0.063		0.063	0.25
	0.25							
	0.063		0.063		0.063		0.063	
	0.063		0.063		0.063		0.063	
	0.063		0.063		0.063		0.063	
α_7	0.25							

	Θ_0							Θ_7
Θ_0	0	0	180		0		180	0
	0							
	180		0		180		0	
	0		180		0		180	
	180		0		180		0	
Θ_7	0							

hier kann das "ungestörte" Signal leicht rekonstruiert werden durch Entfernen der "kleinen" Beträge (0.063) aus dem Spektrum!

Spektrum eines Bildes mit quadratischem Muster:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

DFT

Betrag

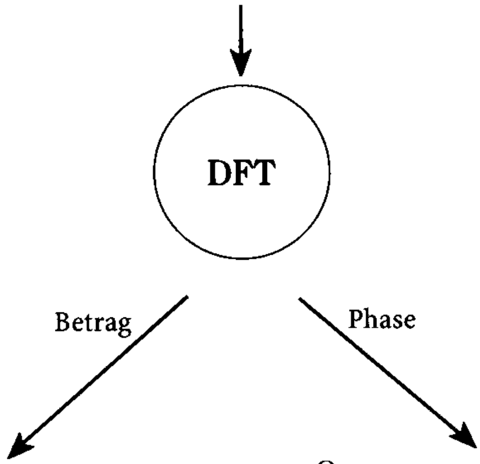
	α_0							α_7
α_0	0,250	0,163	0	0,063	0	0,068	0	0,163
	0,163	0,107	0	0,044	0	0,044	0	0,107
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,068	0,044	0	0,018	0	0,018	0	0,044
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,068	0,044	0	0,018	0	0,018	0	0,044
	0	0	0	0	0	0	0	0
α_7	0,163	0,107	0	0,044	0	0,044	0	0,107

Phase

	Θ_0							Θ_7
Θ_0	0	-112,5	0	67,5	0	-67,5	0	112,5
	-112,5	45	0	-90	0	135	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	62,5	-90	0	135	0	0	0	-135
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-67,5	135	0	0	0	-135	0	90
	0	0	0	0	0	0	0	0
Θ_7	112,5	0	0	-135	0	90	0	-45

ein Bild mit einem einzelnen Strich:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	10	10	10	10	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

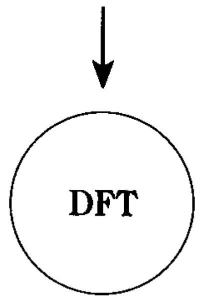


	α_0							α_7
α_0	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
α_7	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408

	Θ_0							Θ_7
Θ_0	0	-157	0	-112.5	0	112	0	157.5
	-45	-112.5	0	112.5	0	157.5	0	67.5
	-90	112.5	0	157.5	0	67.5	0	22.5
	-135	157.5	0	67.5	0	22.5	0	-22.5
	180	67.5	0	22.5	0	22.5	0	-67.5
	135	22.5	0	-22.5	0	-67.5	0	-157.5
	90	-22.5	0	-67.5	0	-157.5	0	-112.5
Θ_7	45	-67.5	0	-157.5	0	-112.5	0	112.5

Die Verschiebung dieses Striches hat keinen Einfluss auf das Betragsspektrum, nur die Phasen ändern sich:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	10	10	10	10	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0



Betrag

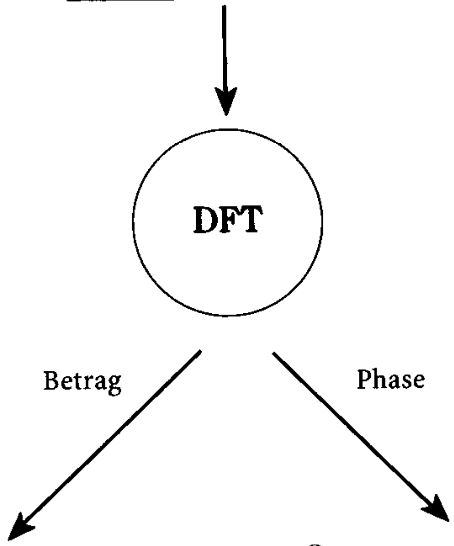
	α_0							α_7
α_0	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
α_7	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408

Phase

	Θ_0							Θ_7
Θ_0	0	112.5	0	-67.5	0	67.5	0	-112.5
	-45	157.5	0	-157.5	0	22.5	0	112.5
	-90	67.5	0	-112.5	0	-22.5	0	157.5
	-135	22.5	0	112.5	0	-67.5	0	67.5
	180	-22.5	0	157.5	0	-157.5	0	22.5
	135	-67.5	0	67.5	0	-112.5	0	-22.5
	90	-157.5	0	22.5	0	112.5	0	-67.5
Θ_7	45	-112.5	0	-22.5	0	157.5	0	-157.5

dasselbe für eine andere Lage-Änderung des Striches:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	10	10	10	10	0
0	0	0	0	0	0	0	0



	α_0							α_7
α_0	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408
α_7	0.625	0.408	0	0.169	0	0.169	0	0.408

	Θ_0							Θ_7
Θ_0	0	112.5	0	-67.5	0	62.5	0	-112.5
	90	-157.5	0	22.5	0	112.5	0	-67.5
	180	-22.5	0	157.5	0	-157.5	0	22.5
	-90	67.5	0	-112.5	0	-22.5	0	157.5
	0	112.5	0	-67.5	0	67.5	0	-112.5
	90	-157.5	0	22.5	0	112.5	0	-67.5
	180	-22.5	0	157.5	0	-157.5	0	22.5
Θ_7	-90	67.5	0	-112.5	0	-22.5	0	157.5

$\Rightarrow$ mögliche Verwendung dieser *Translationsinvarianz der Beträge* bei der Mustererkennung (Erkennung ggf. nicht im Ursprungsbild, sondern im Betragsspektrum durchführen)!

Manipulationen an der Fouriertransformierten:

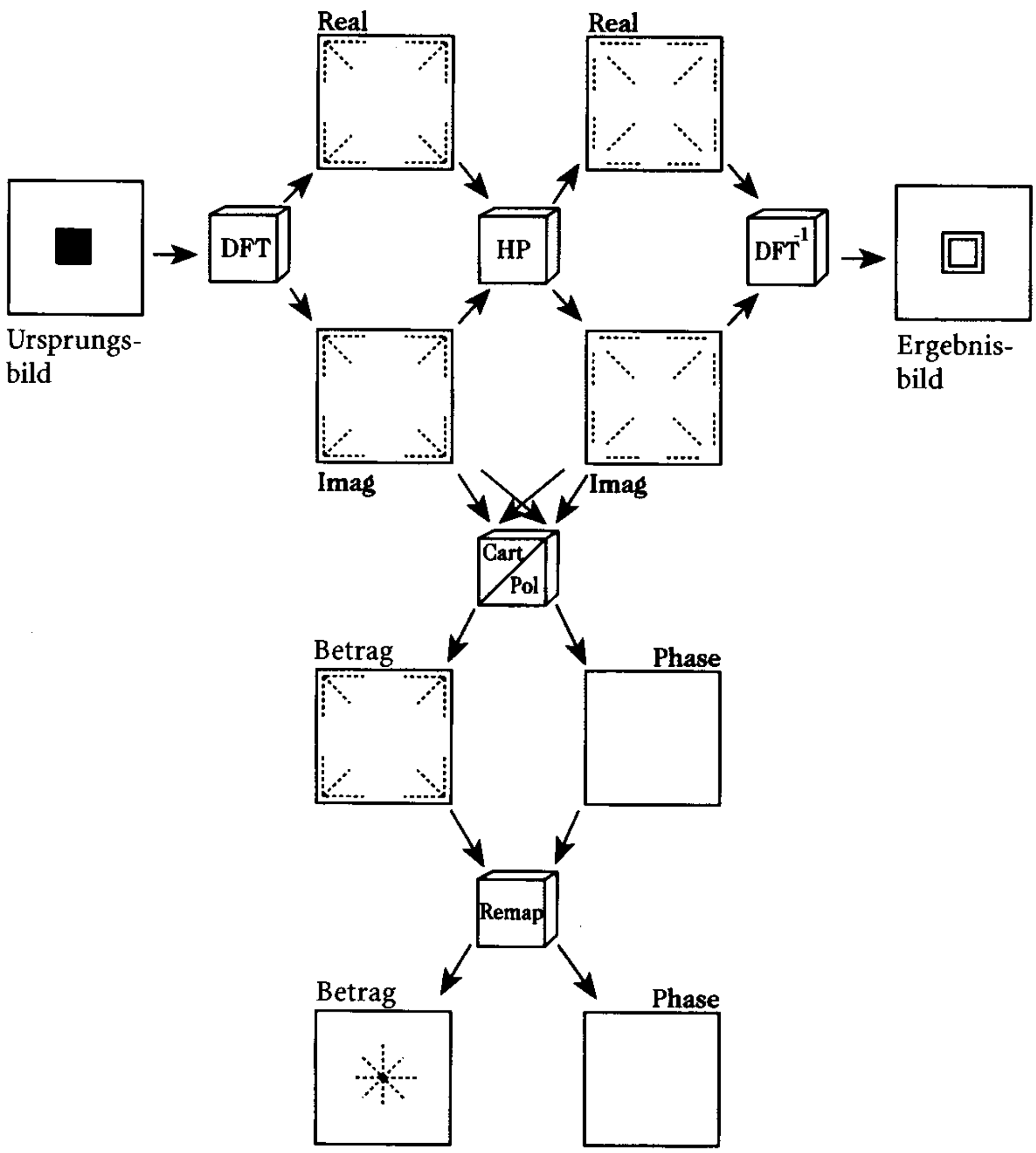
Herausfiltern bestimmter Frequenzen; Hoch-, Tiefpassfilter

Beispiel Hochpassfilter (HP):

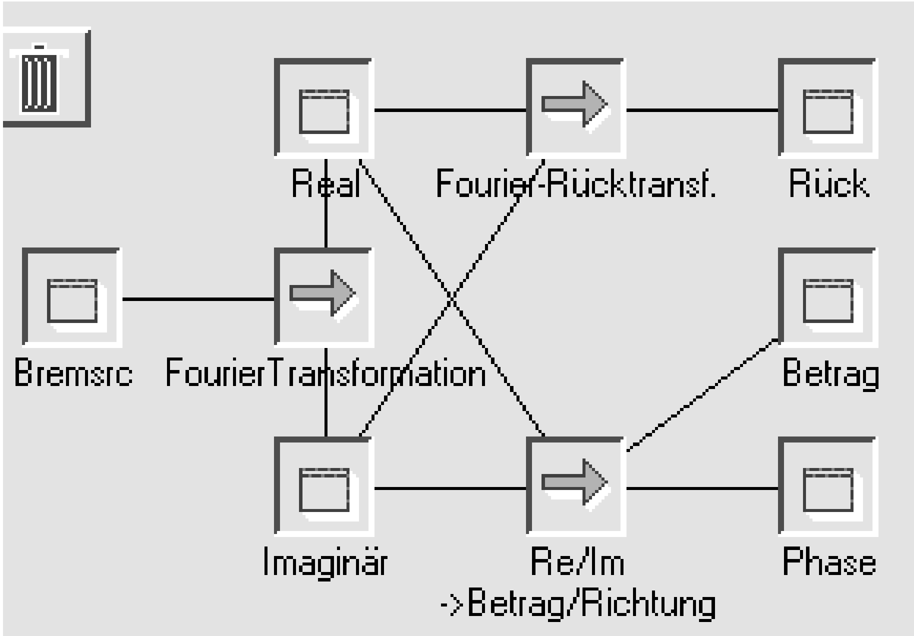
- wende zunächst DFT an
- wende HP an (Entfernung der "Ecken" = niedrigen Frequenzen)
- wende inverse DFT (DFT^{-1}) an

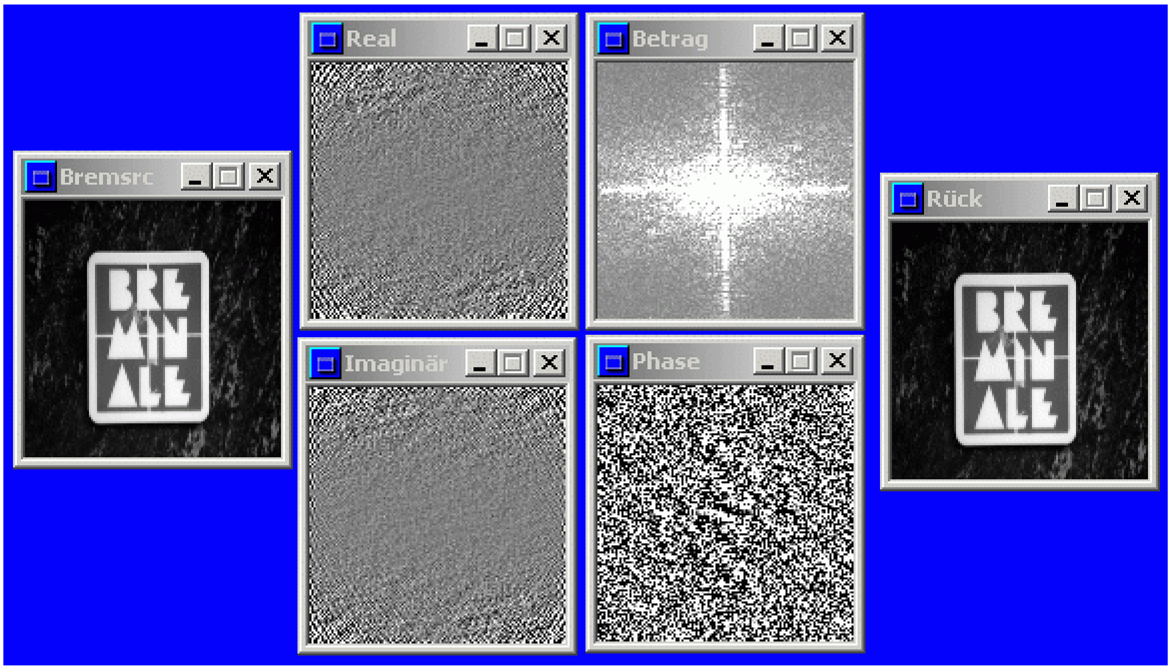
zusätzlich üblich:

- Transformation Cart/Pol
- Änderung der Darstellung des Betragsspektrums ("Remap"), so dass die niedrigen Frequenzen in der Mitte konzentriert sind

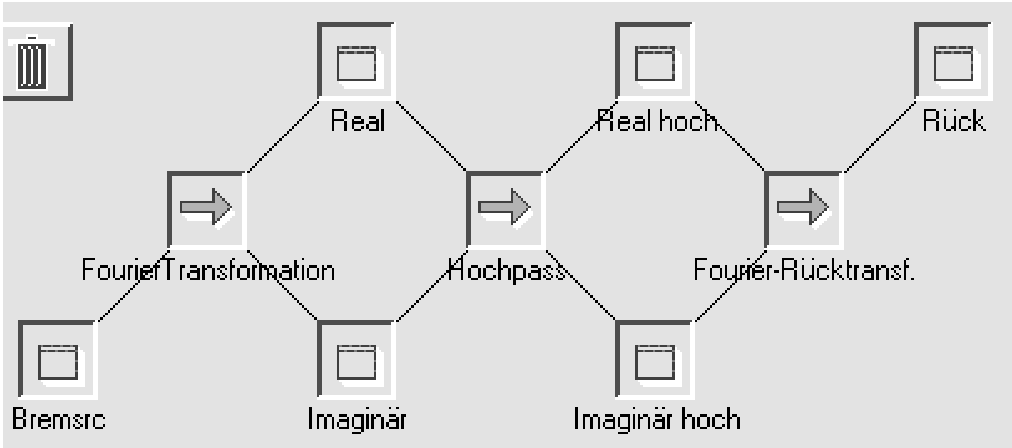


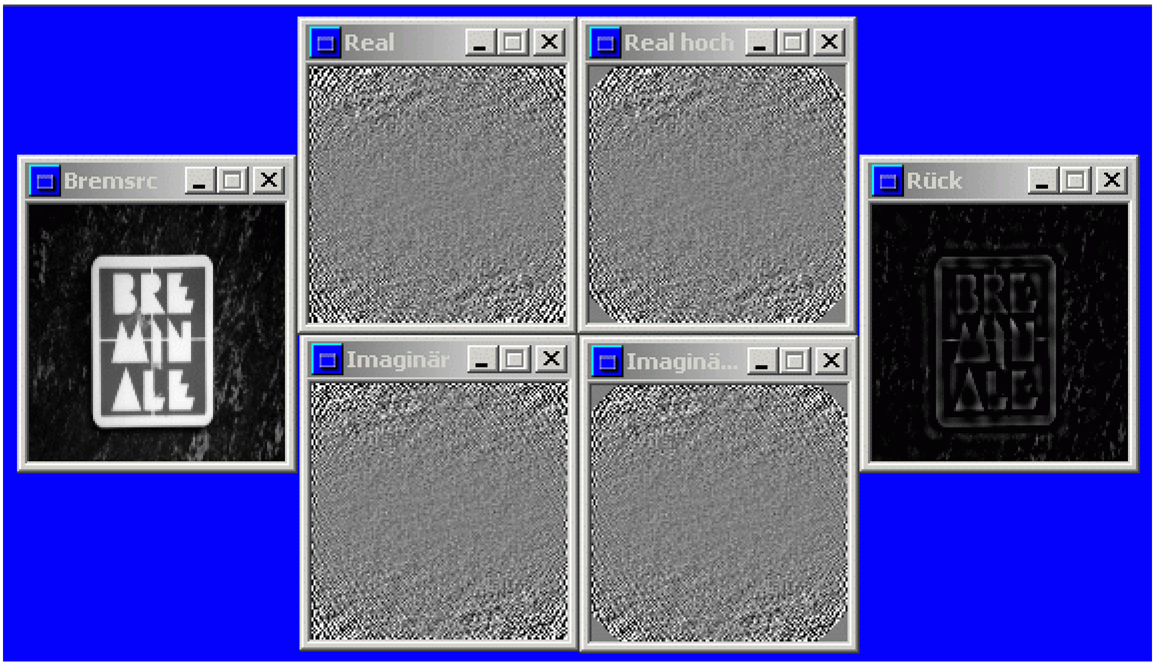
Beispiel einer kompletten Hin- und Rücktransformation (ohne Manipulation), durchgeführt mit DBS-AdOculos (Setup-Datei **`glofou.set`**):





Manipulation mit Hochpassfilter:

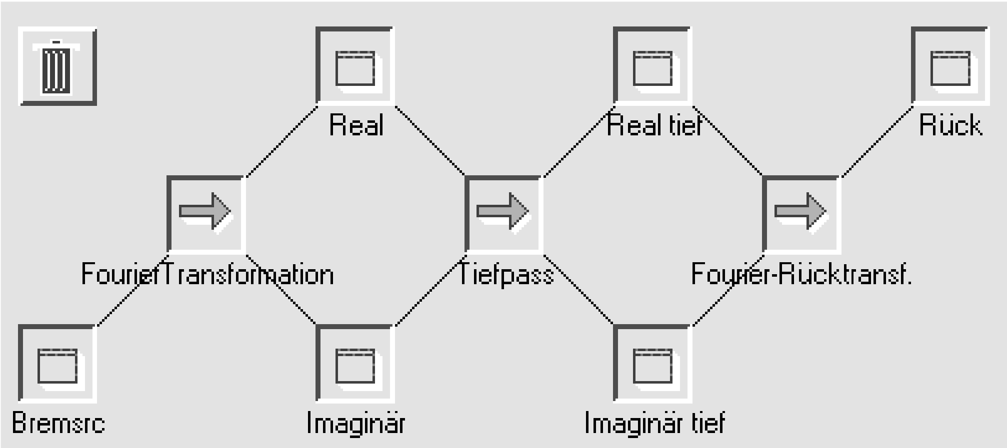


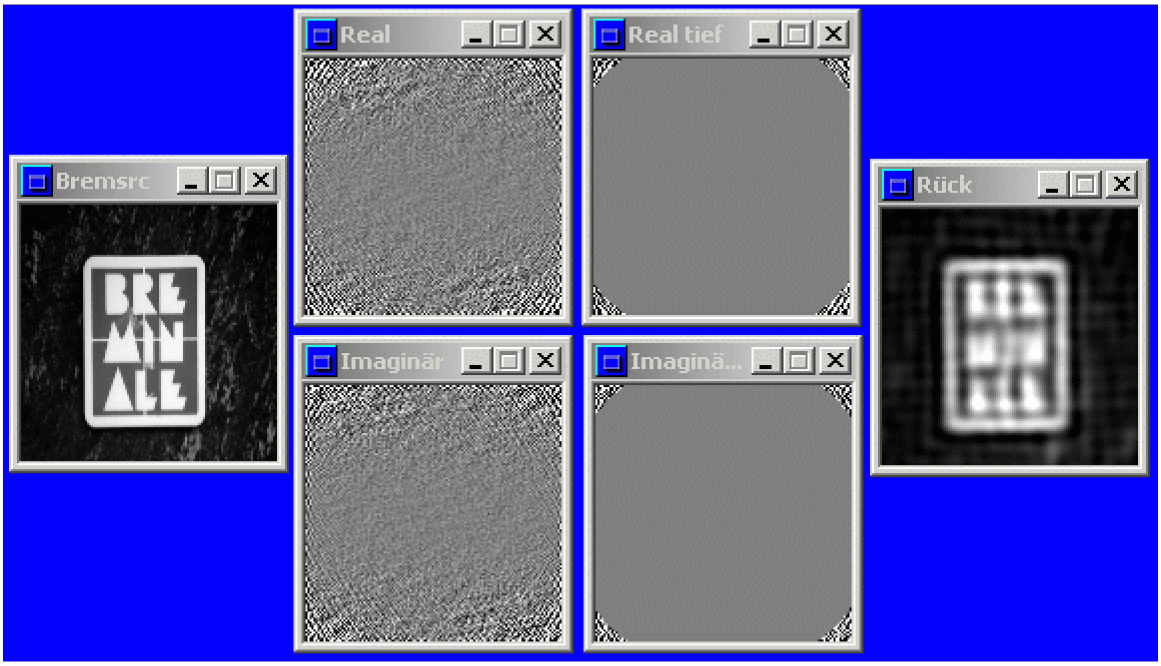


Ergebnisbild, invertiert
(zur besseren Erkennbarkeit):

Fehlen tiefer Frequ. $\Rightarrow$ homogene Bereiche sind ausgespart

Entgegengesetzte Manipulation: Tiefpassfilter
(die verwendeten Filter sind in dieser Form noch nicht für den praktischen Einsatz geeignet)





Implementierung der DFT:

- direkte Umsetzung der Formel: ineffizient ($O(n^2)$)
- "Schnelle Fourier-Transformation" (Fast Fourier Transformation): $O(n \log n)$