

Die diskrete Fouriertransformation (DFT)

Bei der Herleitung des Abtasttheorems tauchte in der Vorlesung die 2-dimensionale Fouriertransformation auf. Diese wird auf kontinuierliche (d.h. auf \mathbb{R}^2 definierte) Funktionen angewandt, welche Bilder repräsentieren, und liefert wieder kontinuierliche Funktionen. Da in der digitalen Bildverarbeitung meist mit diskretisierten Bildinformationen gearbeitet wird, stellt sich die Frage nach einem Analogon der Fouriertransformation für *Matrizen* (Bildmatrizen) anstelle von kontinuierlichen Funktionen. Eine solche *diskrete Fouriertransformation* gibt es in der Tat.

Mathematische Grundlage:

Es sei $(\mathbb{C}^{L \times R}, +, \cdot)$ der Vektorraum aller $L \times R$ -Matrizen mit Einträgen aus der Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Die Operationen "Addition" und "Multiplikation mit einem Skalar" sind wie üblich definiert:

$$R + S = (r_{jk}) + (s_{jk}) = (r_{jk} + s_{jk})$$

$$c \cdot R = c \cdot (r_{jk}) = (c \cdot r_{jk})$$

(die Komponenten durchlaufen jeweils $j = 0; 1; \dots; L-1; k = 0; 1; \dots; R-1$).

Zusätzlich gibt es ein *inneres Produkt* (Skalarprodukt) zweier Matrizen, das wie folgt definiert ist:

$$\langle R, S \rangle = \frac{1}{L \cdot R} \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{R-1} r_{jk} \cdot \overline{s_{jk}}$$

(darin bezeichnet \overline{z} die konjugiert komplexe Zahl zu z :
 $\overline{a + bi} = a - bi$.)

Der Vektorraum $\mathbb{C}^{L \times R}$ hat die Dimension $L \cdot R$. Eine *Orthonormalbasis* (ONB) dieses Vektorraumes ist eine Basis $\{B_{0,0}; B_{0,1}; \dots; B_{L-1,R-1}\}$ mit der Eigenschaft

$$\langle B_{m,n}; B_{p,q} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{falls } (m,n) \neq (p,q) \\ 1, & \text{falls } (m,n) = (p,q). \end{cases}$$

Es lässt sich zeigen, dass die Matrizen

$$B_{m,n} = \left(e^{2\pi i \cdot \left(\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R} \right)} \right)_{j,k},$$

$m = 0, \dots, L-1; n = 0, \dots, R-1$, eine ONB bilden. Somit kann jede $L \times R$ -Matrix $F = (f_{jk})$ als Linearkombination der Basismatrizen $B_{m,n}$ geschrieben werden:

$$f_{jk} = \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{R-1} g_{mn} \cdot e^{2\pi i \left(\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R} \right)} \quad (\text{I})$$

($j = 0, \dots, L-1; k = 0, \dots, R-1$).

Da es sich um eine ONB handelt, kann man die Koordinaten g_{mn} von F bzgl. dieser Basis als Skalarprodukt von F mit dem entsprechenden Basiselement ausrechnen:

$$g_{mn} = \frac{1}{L \cdot R} \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{R-1} f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R} \right)} \quad (\text{II})$$

($m = 0, \dots, L-1; n = 0, \dots, R-1$).

(II) wird als *diskrete, 2-dimensionale Fouriertransformation (DFT)* bezeichnet und (I) als *inverse diskrete, 2-dim. Fouriertransformation*. $G = (g_{mn})$ heißt die *Fouriertransformierte* von F . Die Beträge ($|g_{mn}|$) der Einträge der komplexen Matrix G werden als *Fourierspektrum* oder *Spektrum der Ortsfrequenzen* von F bezeichnet.

Man beachte:

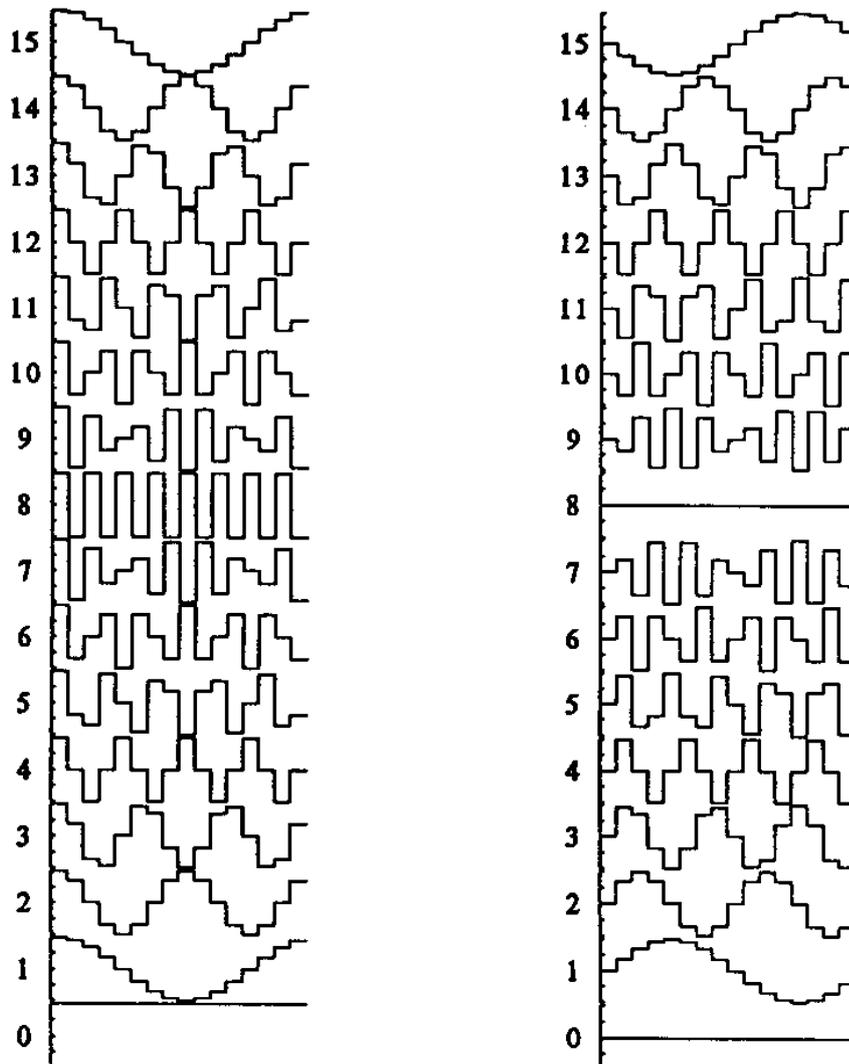
- $e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \sin \alpha$,
die Basismatrizen lassen sich also in Sinus- und Kosinusanteile zerlegen,

- Analogie zur kontinuierlichen Fouriertransformation:

$$g(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi i(xu + yv)} dx dy$$

Vorteil der DFT: Summen sind einfacher zu berechnen als Integrale.

- Es gibt auch eine diskrete, 1-dimensionale Fouriertransformation, die analog für Vektoren definiert ist. Darstellung der Basisvektoren (bzw. -funktionen) der 1-dim. DFT für Vektoren mit 16 Komponenten (links Realteil (Cosinus), rechts Imaginärteil (Sinus)):



(aus Jähne 1993)