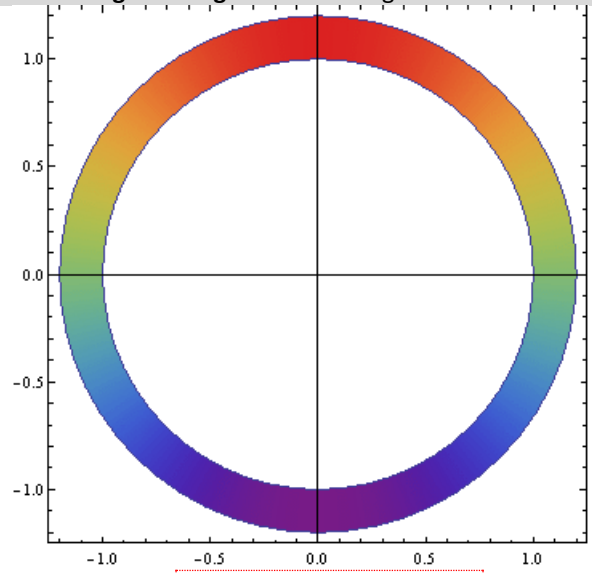
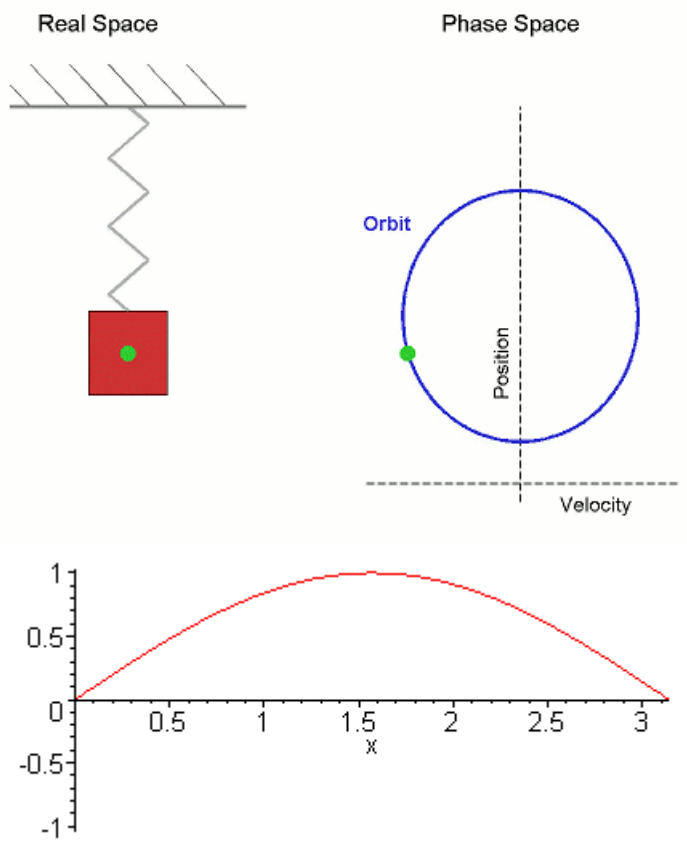


Aufgabenstellungen:	Übungen_02	http://www.uni-forst.qwdg.de/~wkurth/bia17_ub03.pdf
	Übungen_03	http://www.uni-forst.qwdg.de/~wkurth/bia17_ub04.pdf

Aufgabe U3:

Schritt #1: Fouriertransformation – ein wenig „Etymologie/Evolution“

Harmonische Schwingungen: Federpendel, Saitenschwingung	Fouriersche Fragestellung: Wärmeleitung innerhalb eines Drahtes
--	--



PDE: $\frac{\partial y}{\partial t} = \text{Drahtmaterial} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$
Fourier-Reihe: $y(\theta, t) = \sum_n c_n(t) \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot \theta}$
ODE: $c_n'(t) = -2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot c_n(t)$

Fourierkoeffizienten in der linearen Dekomposition der ursprünglichen Wärmeverteilungsfunktion über **basische Funktionen** (hier: komplexe Exponenten $e^{2\pi i n x}$):
 $y(\theta, 0) = \sum_n K_n \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot \theta}$, wobei $K_n = \int_0^{2\pi} y(\theta, 0) \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot \theta} d\theta$

(analytische) Lösung

$y(t) = K \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

$y(\theta, t) = \sum_n K_n \cdot e^{-2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot t} \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot \theta}$

K – Amplitude (Länge)	ω – (Kreis)Frequenz
φ – Anfangsphase (Winkelposition)	t – Zeitpunkt

Gilt für periodische Funktionen $y(\cdot)$

Aufgabe U3:

Schritt #2: [Randbemerkung] komplexe Exponenten bilden eine Orthonormalbasis:

im Hilbertraum $\mathcal{L}^2([0; 2\pi])$ der quadratintegrierbaren Funktionen | im $\mathcal{L}^1(G)$ für jede kompakte kommutative Gruppe G

Abbildung mit Projektionen	Formeln	
	Eulersche Formel:	$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$
	$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2 \cdot i}$
	komplexe Exponenten $[n \in \mathbb{N}]$:	$e_n(t) = e^{2\pi i n t}$
	inneres Produkt (ist eine zweistellige Operation) von komplexen Exponenten:	$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \int_0^{2\pi} e^{2\pi i n t} \cdot e^{-2\pi i m t} dt$
	Orthonormalität von $\{e_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$:	$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Platz für Werbung ☺		

Schritt #3: zweidimensionale (aka 2D) **D**iskrete **F**ourier**T**ransformation eines Bildes $\{f(z, s)\}_{z=0..Z-1; s=0..S-1}$ der Größe $Z \times S$

Normalerweise, von der gleichen Größe $Z \times S$:

$u = 0..Z-1$	$v = 0..S-1$
--------------	--------------

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Konstante} \cdot \sum_{z=0}^{Z-1} \sum_{s=0}^{S-1} f(z, s) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{z \cdot \mathbf{u}}{Z} + \frac{s \cdot \mathbf{v}}{S})} = K \cdot \sum_{z=0}^{Z-1} \left(\sum_{s=0}^{S-1} f(z, s) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{s \cdot \mathbf{v}}{S})} \right) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{z \cdot \mathbf{u}}{Z})}$$

	bei Rücktransformation aka DFT^{-1} aka 2D-IDFT
bei 2D-DFT	$\frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}}$
$\frac{1}{Z \cdot S}$	$\frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}}$
$\frac{1}{Z \cdot S}$	$\frac{1}{Z \cdot S}$
$\frac{1}{Z \cdot S}$	$\frac{1}{Z \cdot S}$

normalisiert → **Konstante** =

schaut nach **zwei** verschachtelten 1D-DFTs aus...

Grundidee für 2D-FFT
 [„schnelle“ 2D-DFT Berechnung]

Aufgabe U3:

Schritt #3: Annäherung von periodischen Funktionen durch **Fourier-Reihen** – einfaches 1D-Beispiel im Blickfeld

- etwas Mathe als Vorspeise ☺:

periodische Funktion $f(x)$, mit der Periodenlänge T [Frequenz $F = 1/T$]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cdot \cos(2\pi Fx) + b_n \cdot \sin(2\pi Fx))$$

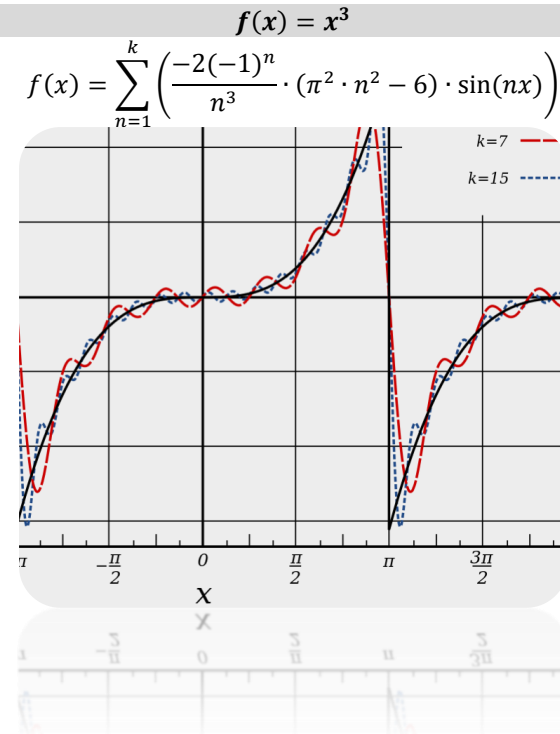
DC-Komponente [aka Nullfrequenz]

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos(2\pi Fx) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin(2\pi Fx) dx$$

Quelle: Wikibooks



Aufgabe U3:

Schritt #4: Lösung der Aufgabe

(a) Schritt #1: **Basismatrizen** aus unserer Formel für 2D-DFT

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Konstante} \cdot \sum_{z=0}^{Z-1} \sum_{s=0}^{S-1} f(z, s) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{z \cdot u + s \cdot v}{Z \cdot S})} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \mathbf{B}_{z,s}; \mathbf{B}_{z,s} = \{ \mathbf{B}_{z,s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \}_{\substack{u=0..Z-1 \\ v=0..S-1}} = \left\{ e^{-2\pi i \cdot (\frac{z \cdot u + s \cdot v}{Z \cdot S})} \right\}_{\substack{u=0..Z-1 \\ v=0..S-1}} \right\}_{\substack{z=0..Z-1 \\ s=0..S-1}}$$

Schritt #2: für unser Beispiel, $z, s \in \{0, 1\}$ - von daher, die Basis besteht aus $|\{0,1\}|^2 = 4$ Matrizen $\{ \mathbf{B}_{0,0}, \mathbf{B}_{0,1}, \mathbf{B}_{1,0}, \mathbf{B}_{1,1} \}$, wobei:

$\mathbf{B}_{0,0} = \left\{ e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot u + 0 \cdot v}{Z \cdot S})} \right\}_{\substack{u=0,1 \\ v=0,1}} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{Z \cdot S})} & e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{Z \cdot S})} \\ e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{Z \cdot S})} & e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{Z \cdot S})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \cdot 0} & e^{-2\pi i \cdot 0} \\ e^{-2\pi i \cdot 0} & e^{-2\pi i \cdot 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 \\ e^0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{B}_{0,1} = \dots \quad \mathbf{B}_{1,0} = \dots \quad \mathbf{B}_{1,1} = \dots$ rechnet selber aus ☺
---	---

Hausaufgabe für Mathe-Fans ☺: warum $e^0 = 1$?

(b) Schritt #1: zu zeigen ist

$$\frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}} \cdot \sum_{u=0}^1 \sum_{v=0}^1 B_{z_1, s_1}(u, v) \cdot \overline{B_{z_2, s_2}(u, v)} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{B}_{z_1, s_1}; \mathbf{B}_{z_2, s_2} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } (z_1, s_1) = (z_2, s_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Schritt #2: na dann los ☺ [alternativer Lösungsweg: da es insgesamt nur 4 Matrizen gibt, man könnte die Ergebnisse für alle möglichen Paare explizit ausrechnen]

$$\frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}} \cdot \sum_{u=0}^{Z-1} \sum_{v=0}^{S-1} B_{z_1, s_1}(u, v) \cdot \overline{B_{z_2, s_2}(u, v)} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \sum_{u=0}^{Z-1} \sum_{v=0}^{S-1} e^{-2\pi i \cdot (\frac{z_1 \cdot u + s_1 \cdot v}{Z \cdot S})} \cdot e^{2\pi i \cdot (\frac{z_2 \cdot u + s_2 \cdot v}{Z \cdot S})} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \sum_{u=0}^{Z-1} \sum_{v=0}^{S-1} e^{2\pi i \cdot (\frac{(z_2 - z_1) \cdot u}{Z} + \frac{(s_2 - s_1) \cdot v}{S})} =$$

Hausaufgabe für Mathe-Fans ☺: für $z \in \mathbb{C}$ und anhand $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, beweist $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

$$\frac{1}{Z \cdot S} \cdot \sum_{u=0}^{Z-1} e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot u}{Z}} \cdot \sum_{v=0}^{S-1} e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot v}{S}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (z_1, s_1) = (z_2, s_2) \\ \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z}{Z}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1)}{Z}} - 1} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S}{S}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1)}{S}} - 1} & \text{sonst} \\ \frac{1}{Z} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z}{Z}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1)}{Z}} - 1} & \text{falls } z_1 \neq z_2 \wedge s_1 = s_2 \\ \frac{1}{S} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S}{S}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1)}{S}} - 1} & \text{falls } s_1 \neq s_2 \wedge z_1 = z_2 \end{cases}$$

Hausaufgabe: warum?

$$\frac{1}{Z \cdot S} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z}{Z}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1)}{Z}} - 1} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S}{S}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1)}{S}} - 1} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \frac{e^{2\pi i \cdot (z_2 - z_1)} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1)}{Z}} - 1} \cdot \frac{e^{2\pi i \cdot (s_2 - s_1)} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1)}{S}} - 1} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \frac{1 - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1)}{Z}} - 1} \cdot \frac{1 - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1)}{S}} - 1} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Tipp zu ☺: Summenformel für geometrische Reihen...



Bildanalyse und Bildverstehen		Georg-August-Universität Göttingen SoSe 22
Fragen/Anregungen zum Stoff? ⇒ 24/7-Support ☺ unter jeos@mail.com emailen		
Lösungen #04	Prof. Winfried Kurth / Alex Tavkheldze	

Aufgabe U3:

(c) Schritt #1: unsere Bildmatrix

$$(f_{jk}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Schritt #2: die DFT-Bildmatrix elementweise berechnen

$$DFT(f_{jk}) = (g_{mn}) = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{bmatrix}:$$

$$g_{mn} = \frac{1}{2 \cdot 2} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2}m + \frac{k}{2}n)} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2}m + \frac{k}{2}n)}$$

$$g_{00} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2} \cdot 0 + \frac{k}{2} \cdot 0)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{0}{2} \cdot 0 + \frac{0}{2} \cdot 0)} + 2 \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{0}{2} \cdot 0 + \frac{0}{2} \cdot 0)} + 3 \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{0}{2} \cdot 0 + \frac{0}{2} \cdot 0)} + 4 \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{0}{2} \cdot 0 + \frac{0}{2} \cdot 0)}) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 2.5$$

$$g_{01} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2} \cdot 0 + \frac{k}{2} \cdot 1)} = \dots = -0.5$$

$$g_{10} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2} \cdot 1 + \frac{k}{2} \cdot 0)} = \dots = -1$$

$$g_{11} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2} \cdot 1 + \frac{k}{2} \cdot 1)} = \dots = 0$$

Also:

$$(g_{mn}) = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe U4:

(a) **Schritt #1:** Kommutativität von **Faltung** [Spielfeld: **Matrizen**]:

Fun Fact für Mathe Fans ☺: Beweis ist super kurz und klar im 1D stetigen Fall sowie auch für Reihen – checkt's [← Hausaufgabe]

Alternative Formulierung: (es ☺) seien M_1 und M_2 zwei beliebigen **Matrizen**. Man beweise, dass $M_1 * M_2 = M_2 * M_1$

Beweis: nehmen wir an (**CE**-Ligatur für „Ohne Einschränkung der Allgemeinheit“), für $i \in \{1,2\}$, M_i hat die Größe $z_i \times s_i$

Laut Definition von **2D-Konvolution**:

$$C(i, j) := [M_1 * M_2](i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_1(z, s) \cdot M_2(i-z, j-s)$$

wobei $z_1 + z_2 - 1 \geq i \geq 0 \leq j \leq s_1 + s_2 - 1$

keine feste Ausgabegröße?

Schritt #2: Kurzentspannung – kleines bisschen von „praktischer Theorie“ ☺:

Beispiel: **Matlab**

Ausgabemodus	Beschreibung	Ausgabegröße
Full Voll	alle möglichen Überlappungen von Bild [hier: M_2] und Maske [aka Kern aka Filter]	$z_1 + z_2 - 1 \times s_1 + s_2 - 1$
Same as Pic Gleich wie Bild	selbsterklärend ☺	$z_2 \times s_2$
Valid Gültig	Maske bleibt innerhalb der Bildgrenzen	$ z_2 - z_1 + 1 \times s_2 - s_1 + 1$

Hausaufgabe: warum?

Schritt #3: weiter mit dem Beweis

$$\sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_1(z, s) \cdot M_2(i-z, j-s) = \sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(z, s) = \sum_{i-z=i}^{i-(z_1-1)} \sum_{j-s=j}^{j-(s_1-1)} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(z, s) =$$

$$\sum_{i-z=i-(z_1-1)}^i \sum_{j-s=j-(s_1-1)}^j M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(i-(i-z), j-(j-s)) = \sum_{i-z=0}^{z_2-1} \sum_{j-s=0}^{s_2-1} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(i-(i-z), j-(j-s)) = [M_2 * M_1](i, j)$$

Warum? (underlined in original)



Bei diesem Schritt wird aber folgendes **vorausgesetzt**: $M_1 = 0 = M_2$ sobald man diese Matrizen verlässt [als **Zero Padding** bekannt]

Alternative Formulierung [„formaler Ausdruck“]: $\forall i \in \{1,2\} (x \notin [0; z_i - 1] \cap \mathbb{N} \vee y \notin [0; s_i - 1] \cap \mathbb{N} \Rightarrow M_i(x, y) = 0)$

Bildanalyse und Bildverstehen		Georg-August-Universität Göttingen SoSe 22
Fragen/Anregungen zum Stoff? ⇒ 24/7-Support ☺ unter jeos@mail.com emailen		
Lösungen #04	Prof. Winfried Kurth / Alex Tavkheldze	

Aufgabe U4:

(b) **Schritt #1:** Distributivität von Faltung [in Bezug auf die Matrixaddition]:

Alternative Formulierung: für beliebige Matrizen M , M_1 und M_2 , es gilt:

$$M * (M_1 + M_2) = M * M_1 + M * M_2$$

Implizite Voraussetzung: das Faltungsformat muss fixiert bleiben **und** die M_i müssen gleiche Größe haben – sonst sind die gar nicht addierbar **und** nicht vergleichbar ☺

Schritt #2: los mit dem Beweis

Hausaufgabe: überprüft ob dieser Schritt zulässig ist (für Doppelsummen)

$$\begin{aligned}
 [M * (M_1 + M_2)](i, j) &= \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z, S) \cdot [M_1 + M_2](i - Z, j - S) = \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z, S) \cdot (M_1(i - Z, j - S) + M_2(i - Z, j - S)) = \\
 &= \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z, S) \cdot M_1(i - Z, j - S) + \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z, S) \cdot M_2(i - Z, j - S) = [M * M_1](i, j) + [M * M_2](i, j)
 \end{aligned}$$



Aufgabe U5:

Schritt #1: Lösung der Aufgabe

(a)

auf der Maske – **rechts unten** ⇔ auf dem Bild – **links oben** ⇒ vor Anwendung Maske **umpositionieren**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Faltungsmatrix an einer konkreten Stelle	Bildmatrix (in einem Koordinatensystem) mit dem Mittelwertfilter drauf																																																																																	
$9 \cdot [K * B](3, 2) = K(0, 0) \cdot B(3, 2) + K(0+1, 0+1) \cdot B(3-1, 2-1) +$ $K(0, 1) \cdot B(3, 1) + K(1, 0) \cdot B(2, 2) +$ $K(0, 2) \cdot B(3, 0) + K(2, 0) \cdot B(1, 2) +$ $K(1, 2) \cdot B(2, 0) + K(2, 1) \cdot B(1, 1) +$ $K(2, 2) \cdot B(1, 0) =$ $1 \cdot B(3, 2) + 1 \cdot B(2, 1) +$ $1 \cdot B(3, 1) + 1 \cdot B(2, 2) +$ $1 \cdot B(3, 0) + 1 \cdot B(1, 2) +$ $1 \cdot B(2, 0) + 1 \cdot B(1, 1) +$ $1 \cdot B(1, 0) =$ $1 + 0 +$ $0 + 1 +$ $0 + 0 +$ $0 + 0 +$ $0 =$ <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> $0 + 0 + 0 +$ $0 + 0 + 1 +$ $0 + 0 + 1 =$ 2 </div> <p style="margin-top: 10px;">übersichtlicher umgruppiert</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Z/S</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	Z/S	0	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	1	1	1	0	0	3	0	0	1	1	1	1	0	0	4	0	0	1	1	1	1	0	0	5	0	0	1	1	1	1	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0
Z/S	0	1	2	3	4	5	6	7																																																																										
0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																										
1	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																										
2	0	0	1	1	1	1	0	0																																																																										
3	0	0	1	1	1	1	0	0																																																																										
4	0	0	1	1	1	1	0	0																																																																										
5	0	0	1	1	1	1	0	0																																																																										
6	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																										
7	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																										
<p>Von daher: $[K * B](3, 2) = \frac{2}{9}$</p>	<div style="border: 1px solid green; padding: 5px; display: inline-block;"> <p>Hausaufgabe: rechnet andere Stellen [im „Valid“ Faltungsmodus] selber aus</p> </div>																																																																																	

Randbemerkung zur Umpositionierung der Faltungsmaske:

2D **Rot**ationen und 2D **Sp**iegelungen [um den Koordinatenursprung] bilden eine **Gruppe** mit folgenden unkompliziert beweisbaren Eigenschaften:

$$Sp(\leftrightarrow) \cdot Sp(\updownarrow) = Rot(\pi) = Rot(-\pi) = Sp(\updownarrow) \cdot Sp(\leftrightarrow) \quad \text{und} \quad Sp(\nearrow) \cdot Sp(\nwarrow) = Rot(\pi) = Rot(-\pi) = Sp(\nwarrow) \cdot Sp(\nearrow)$$

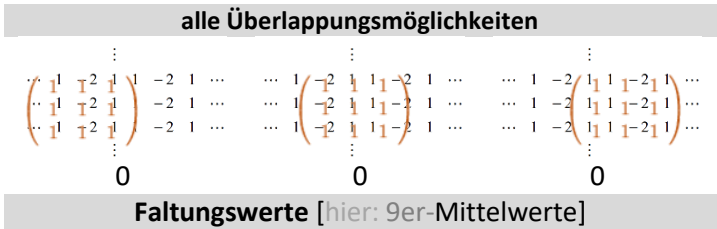
Diese Eigenschaften bieten diverse Möglichkeiten (siehe 6 davon in der obigen Zeile) um eine **Faltungsmaske** vor dem „Gleiten“ **korrekt zu positionieren**.

Aufgabe U5:

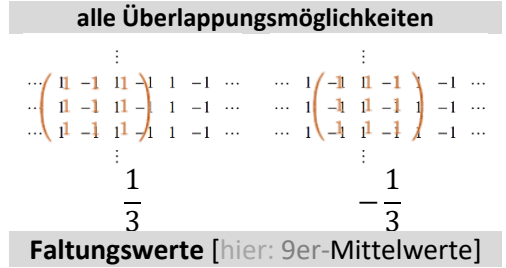
(b)

In gleicher Weise wie [oben](#):

$$K * \text{Geräusch \#1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{matrix} \vdots \\ \dots 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \dots 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \dots 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} \dots 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots \end{matrix}, \text{ weil}$$



$$K * \text{Geräusch \#2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{matrix} \vdots \\ \dots 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} \dots \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots \end{matrix}, \text{ weil}$$



Eignung als Tiefpassfilter [aka **LPF** aka **Glättungsfilter**]:

- Geräusch #1 wird komplett entfernt – „best ever“ **low-pass filter** ☺
- Geräusch #2 wird gedrittelt, also deutlich vermindert – „so lala“ **Tiefpassfilter** ☺

Beispiele:



Aufgabe U6:

Schritt #1: laut **Distributivität** der **Faltung**

$$K * B - K * B_0 = K * (B - B_0) = K * R$$

Dann, laut **Faltungsdefinition**:

$$[K * R](i, j) = \sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 \frac{1}{9} \cdot 1 \cdot [R](i - z, j - s) = \frac{1}{9} \cdot \sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 [R](i - z, j - s)$$

Schritt #2: wegen **Linearität** des Erwartungswertoperators:

$$E([K * R](i, j)) = E\left(\frac{1}{9} \cdot \sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 [R](i - z, j - s)\right) = \frac{1}{9} \cdot \sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 E([R](i - z, j - s)) = \frac{1}{9} \cdot \sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 0 = \frac{1}{9} \cdot 0 = 0$$

Schritt #3: laut dem **Verschiebungssatz**:

$$Var([K * R](i, j)) = E\left(\left([K * R](i, j)\right)^2\right) - \left(E([K * R](i, j))\right)^2 = E\left(\left([K * R](i, j)\right)^2\right) - 0 = E\left(\left([K * R](i, j)\right)^2\right) =$$

$$E\left(\left(\frac{1}{9} \cdot \sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 [R](i - z, j - s)\right)^2\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot E\left(\left(\sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 [R](i - z, j - s)\right)^2\right) =$$

$$\frac{1}{81} \cdot E\left(\sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 ([R](i - z, j - s))^2 + \sum_{(i', j') \neq (i'', j'')} [R](i', j') \cdot [R](i'', j'')\right) =$$

$$\frac{1}{81} \cdot \left(E\left(\sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 ([R](i - z, j - s))^2\right) + E\left(\sum_{(i', j') \neq (i'', j'')} [R](i', j') \cdot [R](i'', j'')\right) \right) =$$

$$\frac{1}{81} \cdot \left(\sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 E\left(\left([R](i - z, j - s)\right)^2\right) + \sum_{(i', j') \neq (i'', j'')} E([R](i', j') \cdot [R](i'', j'')) \right) =$$

$$\frac{1}{81} \cdot \left(\sum_{z=0}^2 \sum_{s=0}^2 E\left(\left([R](i - z, j - s) - E([R](i - z, j - s))\right)^2\right) + \sum_{(i', j') \neq (i'', j'')} E([R](i', j')) \cdot E([R](i'', j'')) \right) = \frac{1}{81} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot Var([R](i - z, j - s)) + \sum_{(i', j') \neq (i'', j'')} 0 \cdot 0 \right) = \frac{1}{81} \cdot (9 \cdot \sigma^2 + 0) = \frac{\sigma^2}{9}$$

Weil es gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^N a_n\right)^2 = \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{m \neq n} a_n \cdot a_m$$

[lässt sich zB. durch Induktionsbeweis zeigen]

Beispiel für $N = 2$:

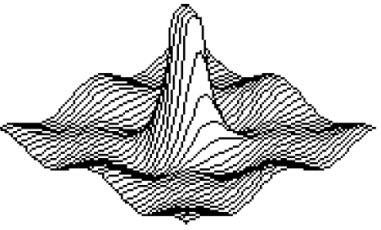
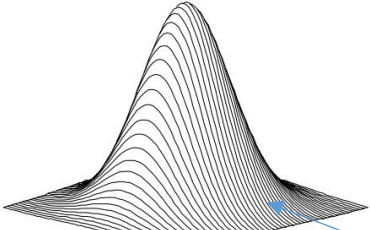
$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1$$

Erwartungswert des Produkts von **stochastisch unabhängigen** Zufallsvariablen

Aufgabe U7:

Schritt #1: besserer Glättungsfilter als Mittelwertfilter – intuitiver Ansatz

Fun Fact: $\frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+1+1+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{1+1+1+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Transferfunktion aka Übertragungsfunktion von Tiefpassfiltern			
3x3-er Mittelwertfilter		3x3-er Binomialfilter aka ganzzahlige & schnelle Gaußfilter-Approximation	
Sinc-Funktion aka Kardinalsinus	Dunkle Materie ☹	Gauß-Glocke $F(u, v) = (\cos(\pi u/Z))^2 \cdot (\cos(\pi v/S))^2$	← Hausaufgabe: checkt's
	$\frac{1}{1+1+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{1+1+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		$\frac{1}{1+2+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{1+2+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

bei ausreichend großer Anzahl von Frequenzen im Frequenzraum

Beobachtung: schöne Isotropie (d.h. Richtungsunabhängigkeit)

Mögliches Erfindungsschema ☺ von 1D Binomialfiltern – wie kommt man auf Binomialfilter?

Bausteine	Verknüpfung	normalisierte aka normierte 1D Binomialfilter	coole ☺ Eigenschaften
[1 1]	[1 1] * [1 1]	$[b_1] = \left(\frac{1}{1+1}\right)^1 \cdot [1 \ 1]^{*1} = \frac{1}{1+1} \cdot [1 \ 1]$ $[b_2] = \left(\frac{1}{1+1}\right)^2 \cdot [1 \ 1]^{*2} = \frac{1}{1+1} \cdot [1 \ 1] * \frac{1}{1+1} \cdot [1 \ 1] = \frac{1}{1+2+1} \cdot [1 \ 2 \ 1]$ $[b_3] = \left(\frac{1}{1+1}\right)^3 \cdot [1 \ 1]^{*3} = \frac{1}{1+3+3+1} \cdot [1 \ 3 \ 3 \ 1]$ <p style="text-align: center;">.....</p>	$\sum_{i=0}^k [b_k](i) = 2^k$ $b_n * b_m = b_{n+m}$ <hr/> $b_k \rightarrow G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
triviale 1D Glättungsfilter	Faltung	Verkettungen	Zentraler Grenzwertsatz beweist diese zu Hause ☺

Hausaufgabe: unter welchen Voraussetzungen an μ und σ erreicht man die Annäherung $G(i) \cong 2^{-k} \cdot \binom{k}{i}$?
 [Hinweis: was wäre bei $\mu = \frac{k}{2}$ und $\sigma^2 = \frac{k}{4}$? – guckt euch die [Binomialverteilung](#) und das [Zufallsbrett](#) an]

Pascalshes Dreieck: Veranschaulichung von Koeffizienten eines Binoms $(x + y)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot x^i \cdot y^{k-i}$

Schritt #2: Zuwachs an Dimension (1D -> 2D)

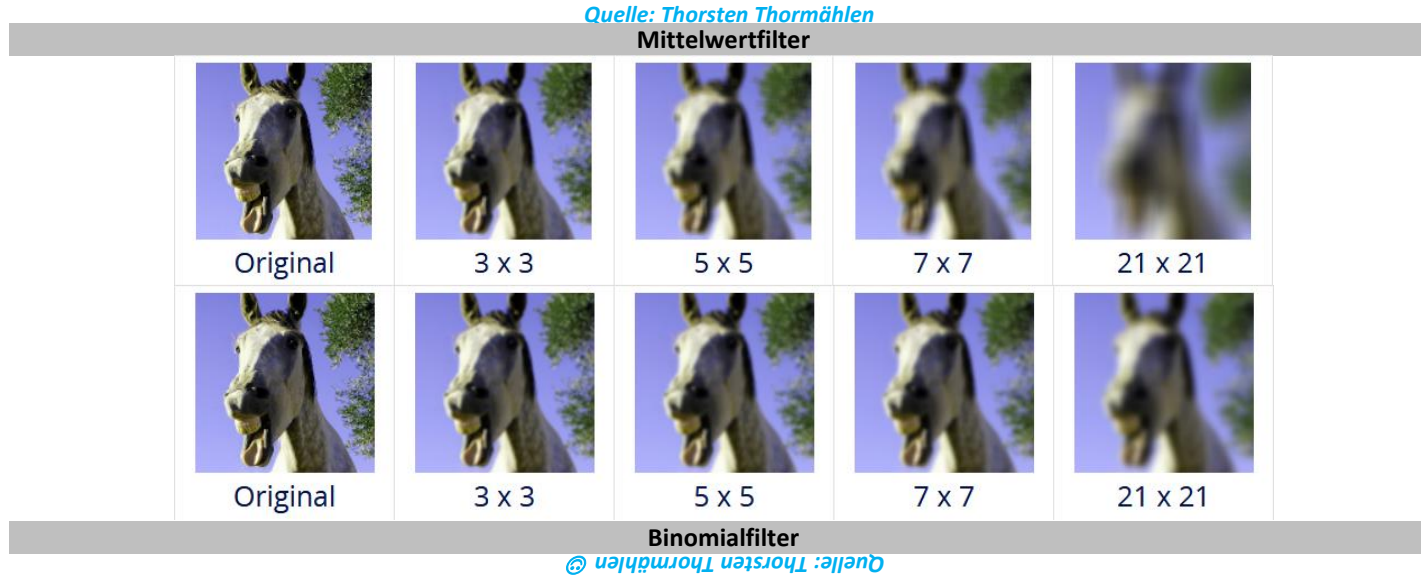
2D Binomialfilter = 1D Binomialfilter & x/y *-Separierbarkeit

$$[{}^2b_{m \times n}] = [b_m]^T * [b_n]$$

denn die 2D-Gaußfunktion $G(x, y) = \text{Amplitude} \cdot e^{-\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)}$ ist x/y-separierbar (wegen $e^{x^2+y^2} = e^{x^2} \cdot e^{y^2}$)

Aufgabe U7:

Schritt #3: Anwendungsbeispiele



Schritt #4: Lösung der Aufgabe

$$B_2^T \cdot B_3 = \frac{1}{2^2} \cdot \left[\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2} \right]^T \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \left[\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3} \right] = \frac{1}{4} \cdot [1, 2, 1]^T \cdot \frac{1}{8} \cdot [1, 3, 3, 1] = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{8} \cdot [1, 3, 3, 1] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Interessante Nebenbeobachtung für Mathe Fans ☺:

Achtung: **Faltung** ist im Allgemeinen **nicht** das Gleiche wie **Matrixmultiplikation**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * [1, 3, 3, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1, 3, 3, 1]$$

Beobachtung: **Faltung** zweier Vektoren (also, **Spalten-** und **Zeilenvektoren**) liefert **das gleiche Ergebnis** wie deren **Matrixmultiplikation** (also **dyadisches aka tensorielles aka äußeres Produkt**)

➔ **Hausaufgabe:** warum und wann gilt sowas im Allgemeinen?

Hinweis: konstruiert ein Verfahren bei dem man **jede Faltung** [einfachheitshalber, wählt den Faltungsmodus „valid“] **zweier Matrizen** durch die **Matrixmultiplikation** deren **Umformungen darstellt** – nehmt eine kleine Bildmatrix, einen noch kleineren ☺ Kern und versucht so ein Verfahren selber zu basteln.

dünnbesetzte doppelblock-zyklische Matrizen [aka **Toeplitz-Blockmatrizen**] könnten euch auf dem Lösungsweg recht behilflich sein ☺

Aufgabe U7:

Schritt #5: Eignung als ein besserer Tiefpassfilter [am Beispiel zweier **periodischen Störungen**]

$$\frac{1}{32} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -2 & 1 & 1 \\ \vdots & -2 & 1 & 1 \\ \vdots & -2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \vdots & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \vdots & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{32} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -1 & 1 & -1 \\ \vdots & -1 & 1 & -1 \\ \vdots & -1 & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

2D Binomialfilter zeigen hiermit ein **besseres Tiefpassverhalten** als Mittelwertfilter
