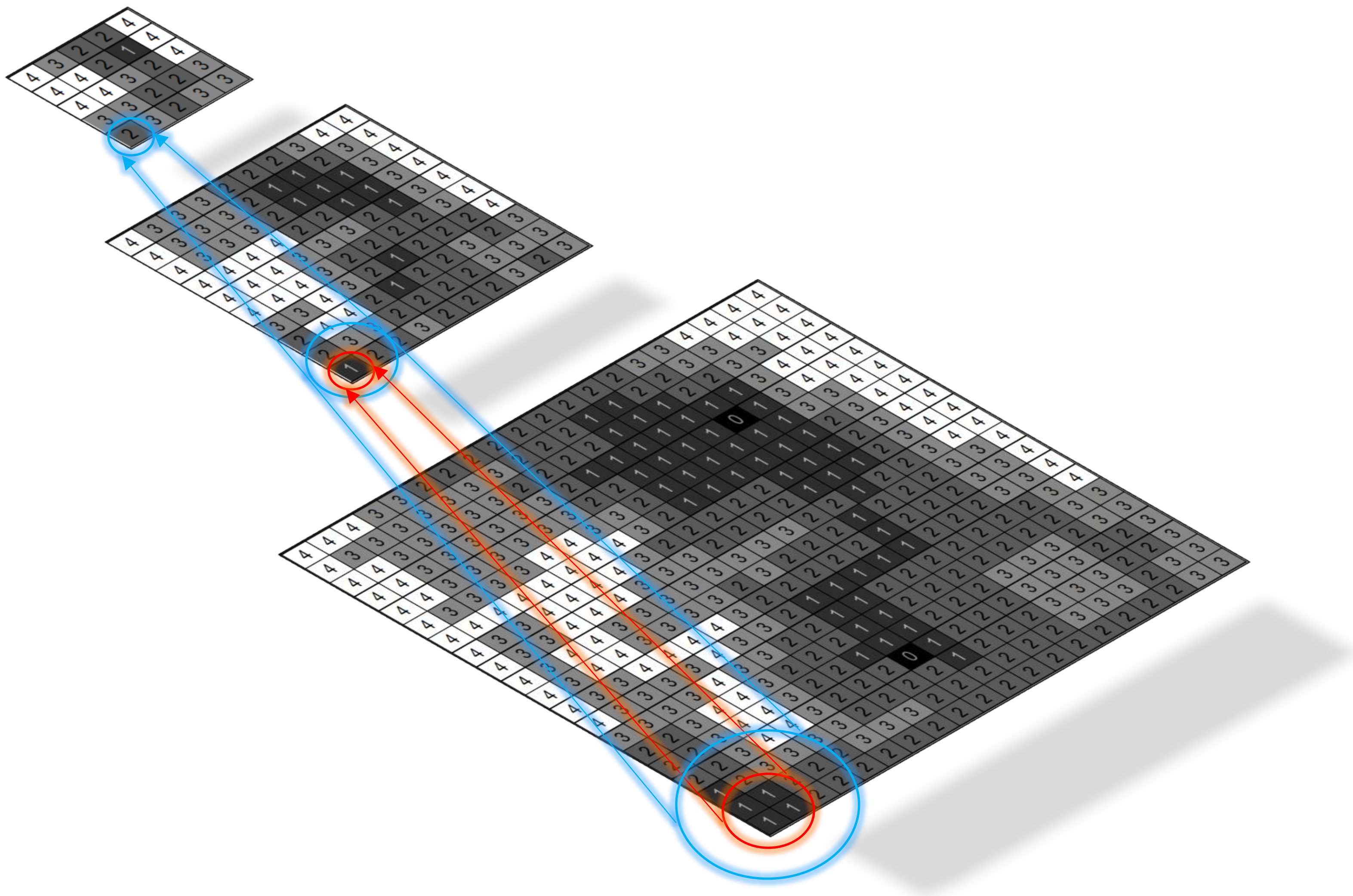
Aufgabenstellungen:		
	Übungsblatt_02	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia22_ue02.pdf

ÜB2:Aufgabe 1:

(a) Schritt #1: 3-schichtige Bildpyramide durch $2 \times (Glättung\ durch\ Mittelwert\ \&\ Downsampling)$



ÜB2:Aufgabe 1:

(b) Schritt #1: durch $(Manhattan, Euklid, Tschebyschew) = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \infty)$ –Normen erzeugte Minkowski-Metriken

euklidischer Abstand aka 2 –Norm-Metrik

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
0	4	4	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4
1	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	2	2	3	3	4	4	4
2	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	2	2	3	3	4	4
3	4	4	3	3	3	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1	1	3	4	4	4
4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	0	1	3	4	4	4
5	4	3	3	3	3	4	4	3	3	2	1	1	1	1	1	1	3	3	4	4
6	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1	1	1	1	1	1	2	3	4	4
7	4	3	3	4	4	4	4	3	2	2	2	2	2	1	1	1	2	3	4	4
8	4	3	3	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	2	3	4	4
9	4	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	2	2	3	4	4
a	4	3	4	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	1	2	2	2	3	3	4
b	4	3	3	4	4	4	4	3	2	2	2	2	2	1	2	2	2	3	3	4
c	4	3	3	3	3	4	3	3	2	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
d	3	3	3	3	4	3	3	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	4
e	2	2	3	4	4	3	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
f	2	2	3	4	4	3	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	2	3	3
g	2	2	3	4	4	3	2	2	2	0	1	2	2	2	3	3	3	2	2	3
h	1	2	3	3	3	3	2	2	2	2	1	2	2	2	3	3	3	2	2	3
i	1	1	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	3
j	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3

$$\boldsymbol{D_E}[(\boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{S_0}), (\boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{S_0})] = \boldsymbol{D_E}[(\boldsymbol{g}, \mathbf{9}), (\mathbf{4}, \boldsymbol{e})] = \sqrt{(\boldsymbol{g} - \mathbf{4})^2 + (\mathbf{9} - \boldsymbol{e})^2}$$
$$= \sqrt{(\mathbf{16} - \mathbf{4})^2 + (\mathbf{9} - \mathbf{14})^2} = \sqrt{\mathbf{12}^2 + \mathbf{5}^2} = \sqrt{\mathbf{13}^2} = \boxed{\mathbf{13}}$$

Straßenblock aka **Manhattan** aka **Taxi**-Distanz aka 1 –Norm-Metrik

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
0	4	4	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4
1	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	2	2	3	3	4	4	4
2	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	2	2	3	3	4	4
3	4	4	3	3	3	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1	1	3	4	4	4
4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	0	1	3	4	4	4
5	4	3	3	3	3	4	4	3	3	2	1	1	1	1	1	1	3	3	4	4
6	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1	1	1	1	1	1	2	3	4	4
7	4	3	3	4	4	4	4	3	2	2	2	2	2	1	1	1	2	3	4	4
8	4	3	3	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	2	3	4	4
9	4	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	2	2	3	4	4
a	4	3	4	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	1	2	2	2	3	3	4
b	4	3	3	4	4	4	4	3	2	2	2	2	2	1	2	2	2	3	3	4
c	4	3	3	3	3	4	3	3	2	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
d	3	3	3	3	4	3	3	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	4
e	2	2	3	4	4	3	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
f	2	2	3	4	4	3	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	2	3	3
g	2	2	3	4	4	3	2	2	2	0	1	2	2	2	3	3	3	2	2	3
h	1	2	3	3	3	3	2	2	2	2	1	2	2	2	3	3	3	2	2	3
i	1	1	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	3
j	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3

$$\boldsymbol{D_4}[(\boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{S_0}), (\boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{S_0})] = \boldsymbol{D_4}[(\boldsymbol{g}, \mathbf{9}), (\mathbf{4}, \boldsymbol{e})] = |\boldsymbol{g} - \mathbf{4}| + |\mathbf{9} - \boldsymbol{e}|$$
$$= |\mathbf{16} - \mathbf{4}| + |\mathbf{9} - \mathbf{14}| = \mathbf{12} + \mathbf{5} = \boxed{\mathbf{17}}$$

Schachbrett aka **König** aka **Tschebyschew**-Distanz aka ∞ –Norm-Metrik

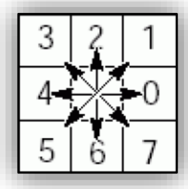
$$\boldsymbol{D_8}[(\boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{S_0}), (\boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{S_0})] = \boldsymbol{D_8}[(\boldsymbol{g}, \mathbf{9}), (\mathbf{4}, \boldsymbol{e})] = \boldsymbol{max}\{|\boldsymbol{g} - \mathbf{4}|, |\mathbf{9} - \boldsymbol{e}|\}$$
$$= \boldsymbol{max}\{|\mathbf{16} - \mathbf{4}|, |\mathbf{9} - \mathbf{14}|\} = \boldsymbol{max}\{\mathbf{12}, \mathbf{5}\} = \boxed{\mathbf{12}}$$

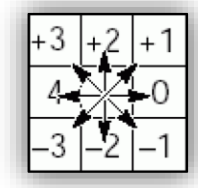
ÜB2:Aufgabe 1:

(c)

Schritt #1: absoluter vs differenzieller **Ketten**code

Navigationsschemas

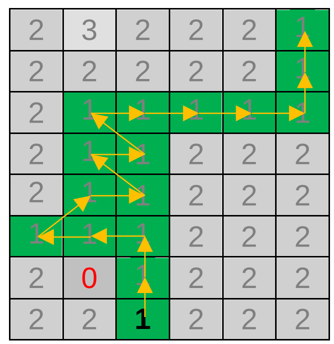


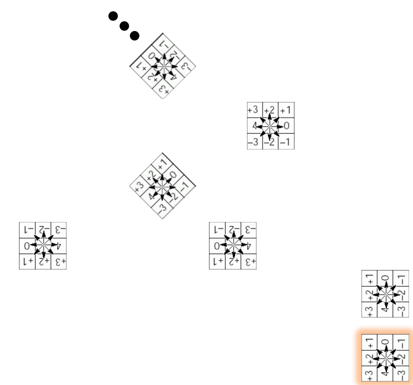


Verlauf der Zielregion

[**nicht** eindeutig – je nach eingesetztem Kontur**verfolgungsalgorithmus** und gewähltem Umlaufsinn – *hier ein Mix*]

Bootes Void ☺





absoluter Richtungscode:	differenzieller aka Differenzen-basierter aka relativer Richtungscode:
22 44 1 0303 0000 22	$\pm 0 \pm 0 + 2 \pm 0 - 3 - 1 + 3 - 3 + 3 - 3 \pm 0 \pm 0 \pm 0 + 2 \pm 0$

Hausaufgabe:
wie?

angenommene
0 –Anfangsausrichtung
(Längs- aka *Head*-Achse)

ÜB2:Aufgabe 1:

(d)

Schritt #1: Lauflängenkodierung der Region

Zielregion

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
0	4	4	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4
1	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	2	2	3	3	4	4	4
2	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	2	2	3	3	4	4
3	4	4	3	3	3	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1	1	3	4	4	4
4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	0	1	3	4	4	4
5	4	3	3	3	3	4	4	3	3	2	1	1	1	1	1	1	3	3	4	4
6	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1	1	1	1	1	1	2	3	4	4
7	4	3	3	4	4	4	4	3	2	2	2	2	2	1	1	1	2	3	4	4
8	4	3	3	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	2	3	4	4
9	4	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	2	2	3	4	4
a	4	3	4	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	1	2	2	2	3	3	4
b	4	3	3	4	4	4	4	3	2	2	2	2	2	1	2	2	2	3	3	4
c	4	3	3	3	3	4	3	3	2	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
d	3	3	3	3	4	3	3	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	4
e	2	2	3	4	4	3	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
f	2	2	3	4	4	3	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	2	3	3
g	2	2	3	4	4	3	2	2	2	0	1	2	2	2	3	3	3	2	2	3
h	1	2	3	3	3	3	2	2	2	2	1	2	2	2	3	3	3	2	2	3
i	1	1	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	3
j	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3

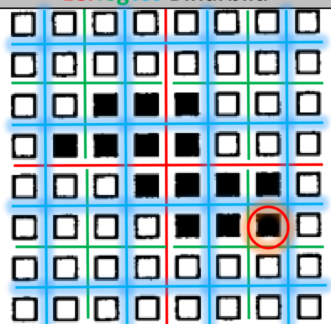
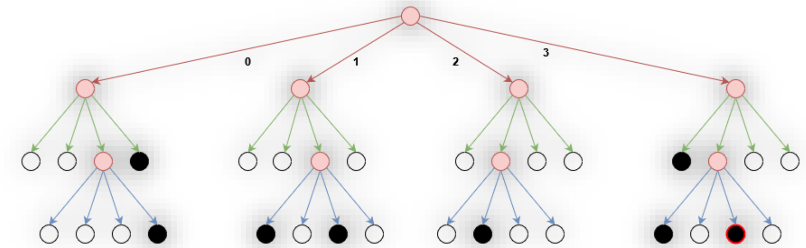
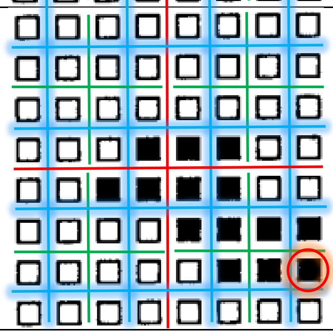
Lauflängencode

[gewähltes Format: (Zeilenindex Anfangsspalte Länge)]

(a d 1)
(b d 1)
(c 9 5)
(d 9 2)
(e 9 2)
(f 8 3)
(g a 1)
(h a 1)

ÜB2:Aufgabe 2:

Schritt #1: all-in-one

zerlegtes Binärbild	**Quaternärbaum aka Quadtree**
	
	**Hausaufgabe**

ÜB2:Aufgabe 3:

Schritt #1: das Thema der Aufgabe bestimmen und begreifen

Geometrische Bildtransformation: ist eine mathematische (im Grunde – eine **formale**) Beschreibung einer **räumlichen** Transformation eines Bildes

Scherung = Rotationen + Skalierungen
Hausaufgabe: warum?

Detailwissen: das sieht nach einer waagerechte Scherungstransformation aus

So eine geometrische Transformation des Bildes $B(z,s)$ schaut dann (algebraisch) folgendermaßen aus:

Koordinatenwechsel: **entweder bewegt/deformiert sich das Bild oder das ursprüngliche Koordinatensystem** (in Gegenrichtung)

$$TB(z,s) = B(z',s')$$

Normalerweise kommen noch Interpolationstechniken dazu ...

Wobei:

$$\begin{cases} z' = z'(z,s) \\ s' = s'(z,s) \end{cases} \text{und, bei } \textbf{Umkehr}\text{transformation } T^{-1}: \begin{cases} z = z(z',s') \\ s = s(z',s') \end{cases}$$

Für Mathe Fans☺: es stellt sich die Frage, ob es so eine **Inverse** überhaupt gibt

~~DISTORTION~~

Bereichseinschränkung: nur **affine** Transformationen, d.h., für fixierte Werte a_i und b_i (wobei $i \in \{t,z,s\}$):

linearer Anteil

$$\begin{cases} z' = z'(z,s) = a_t + a_z \cdot z + a_s \cdot s \\ s' = s'(z,s) = b_t + b_z \cdot z + b_s \cdot s \end{cases} \text{oder, } \textbf{kurz} \text{ in Matrixform: } \begin{bmatrix} z' \\ s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_z & a_s \\ b_z & b_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \end{bmatrix} \text{ oder } \textbf{noch kürzer} \text{ in homogener Matrixform: } \begin{bmatrix} z' \\ s' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_z & a_s & a_t \\ b_z & b_s & b_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Weitere **Einschränkung**: die Invertierbarkeit der Matrix $\begin{bmatrix} a_z & a_s \\ b_z & b_s \end{bmatrix}$ wird i.d.R. bereits in der Definition von affinen Transformationen vorausgesetzt (**Hausaufgabe**: versucht zu klären, warum). Der Singulärwertzerlegungssatz besagt dann - so eine affine Transformation besteht aus Kombinationen (d.h. homogenen Matrixmultiplikationen) von:

Verschiebungstransformationen (aka Translationsmatrizen)	(**nicht unbedingt** gleichmäßigen) **Skalierung**stransformationen (können verzerren)
Drehungs- & **Spiegelung**stransformationen (aka Rotations & Reflexionsmatrizen)	**Scherung**stransformationen (verursachen Verzerrung aka Dehnung/Stauchung)

Schritt #2: tatsächliche Lösung der Aufgabe:

Mathematischer **Satz #1**: jede 2D affine Transformation hat eine Inverse (**Hausaufgabe**: checkt ob sie dabei eindeutig ist) und diese Inverse an sich ist auch affin.

Fundamentaler **Satz #2**: für jeden 3 x 3 bipartiten Graphen $\begin{matrix} \overrightarrow{p_1}(p_{11}, p_{12}) & \longrightarrow & \overrightarrow{p_1}'(p_{11}', p_{12}') \\ \overrightarrow{p_2}(p_{21}, p_{22}) & \longrightarrow & \overrightarrow{p_2}'(p_{21}', p_{22}') \\ \overrightarrow{p_3}(p_{31}, p_{32}) & \longrightarrow & \overrightarrow{p_3}'(p_{31}', p_{32}') \end{matrix}$ von **nichtkollinearen** (**Pass** aka **Referenz**)Punkten auf jeder Seite, es gibt die einzigartige affine Transformation, die die linke Seite auf die rechte Seite abbildet.

(a) + (b)

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a + 0b + u = 2 \\ 2c + 0d + v = 5 \\ 0a + b + u = 1 \\ 0c + d + v = 3 \\ 0a - b + u = 3 \\ 0c - d + v = 3 \end{array}\right. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a + 0b + u = 2 \\ 2c + 0d + v = 5 \\ 0a + b + u = 1 \\ 0c + d + v = 3 \\ 2u = 4 \\ 2v = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 2 - 2 \\ 2c = 5 - 3 \\ b = 1 - 2 \\ d = 3 - 3 \\ u = 2 \\ v = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ c = 1 \\ b = -1 \\ d = 0 \\ u = 2 \\ v = 3 \end{array}\right.$$

Also:

Korrekte Reihenfolge nicht vergessen

$$\begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Verschiebung}\left[\overrightarrow{(2,3)}\right] \circ \boldsymbol{Drehung}\left[90^0 \circlearrowleft\right]$$

Randbemerkung: der Wolkenkratzer ☺ da oben ist einfach ne Matrizengleichung der Art $[X] \cdot [A] = [B]$ und lässt sich im Allgemeinen (nicht unbedingt zeit)effizienter lösen:

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}$$

Wir haben also das ganze Problem auf die Berechnung von $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ reduziert – und diese Inverse apriorisch existiert, denn die Determinante der Matrix $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ stellt den vorzeichenbehafteten Flächeninhalt des Dreiecks mit den Spitzen in p_1', p_2', p_3' dar, und diese Fläche ist, **unter der Nichtkollinearitätsannahme,** ungleich Null.

<u>ÜB2:Aufgabe 4:</u>

Schritt #1: Einträge der DFT-Bildmatrix berechnen [fürs Ursprungsbild $\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b_{jk}}\right)$]:

$$DFT(B) = (g_{mn})$$

$$g_{mn} = \frac{1}{L\cdot R}\cdot\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{R-1} b_{jk}\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{mj}{L}+\frac{nk}{R}\right)}$$

Schritt #2: Einträge der DFT-Bildmatrix berechnen [fürs modifizierte Bild $\widehat{\boldsymbol{B}} = \left((-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{j+k}}\cdot\boldsymbol{b_{jk}}\right)$]:

$$DFT\left(\hat{B}\right) = \left(\widehat{g_{mn}}\right)$$

$$\widehat{g_{mn}} = \frac{1}{L\cdot R}\cdot\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{R-1}(-1)^{j+k}\cdot b_{jk}\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{mj}{L}+\frac{nk}{R}\right)} = \frac{1}{L\cdot R}\cdot\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{R-1} b_{jk}\cdot e^{\pm\pi i(j+k)}\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{mj}{L}+\frac{nk}{R}\right)} =$$

$$\frac{1}{L\cdot R}\cdot\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{R-1} b_{jk}\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{mj}{L}+\frac{nk}{R}\pm\frac{j+k}{2}\right)} = \frac{1}{L\cdot R}\cdot\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{R-1} b_{jk}\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{\left(m\pm\frac{L}{2}\right)j}{L}+\frac{\left(n\pm\frac{R}{2}\right)k}{R}\right)} = g_{m\pm\frac{L}{2},n\pm\frac{R}{2}}$$