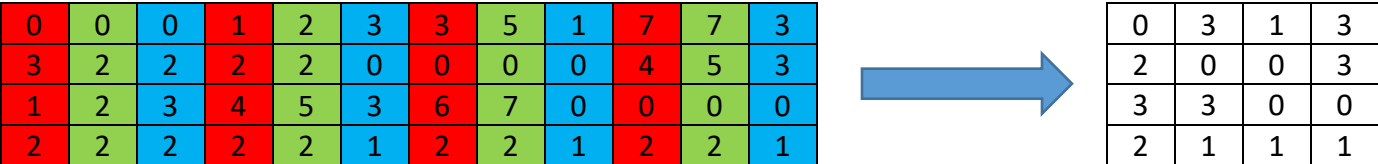


Übungsblatt #01: http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia_ub01.pdf

Aufgabe U1: (#a)

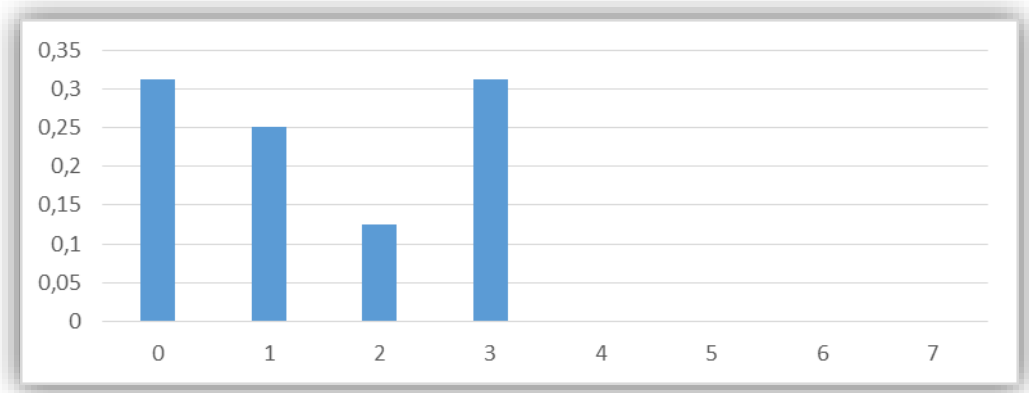
Schritt #1: den Blaukanal extrahieren



Schritt #2: Hilfstabelle ausfüllen

Intensitätswert	0	1	2	3	4	5	6	7
h_{abs}	5	4	2	5	0	0	0	0
h_{rel}	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	0	0	0	0

Schritt #3: Histogramm erstellen



Aufgabe U1: (#b)

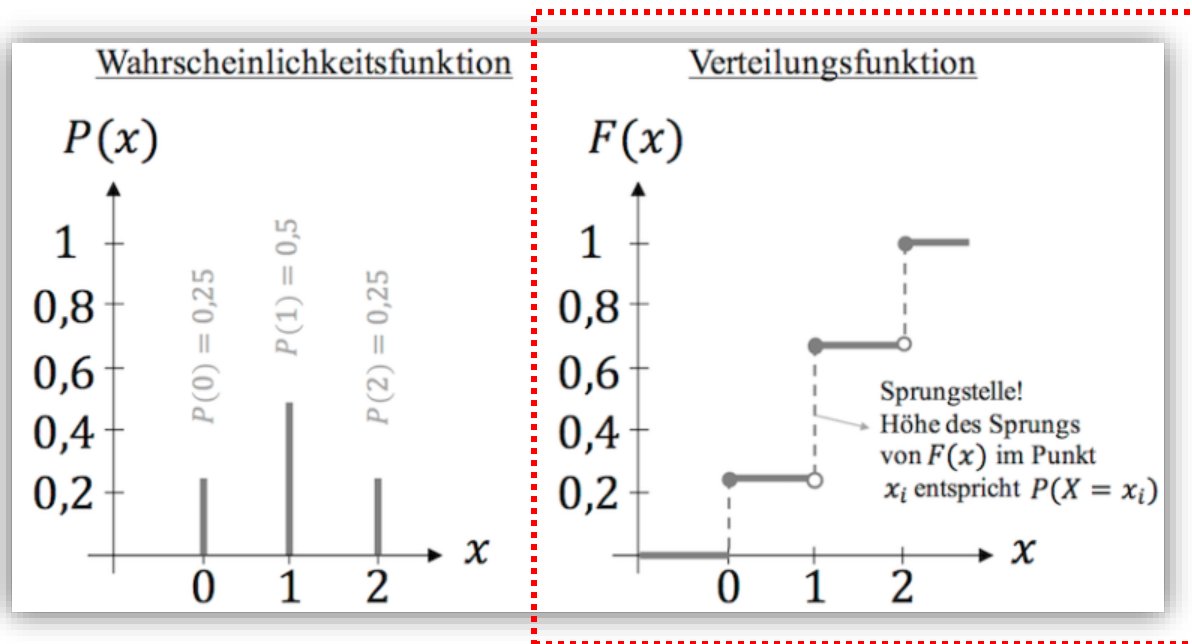
Schritt #1: Formel der kumulierten Wahrscheinlichkeit (W steht für unsere (Farb)Intensitätswerte):

$$H_c(w) = \sum_{i=0}^w h_{rel}(i)$$

Schritt #2: Beispiel – Berechnung an unseren diskreten Stellen

Argument (w)	0	1	...	7
Funktionswert ($H_c(w)$)	$H_c(0) = \sum_{i=0}^0 h_{rel}(i) =$ $h_{rel}(0) = \frac{5}{16}$	$H_c(1) = \sum_{i=0}^1 h_{rel}(i) =$ $h_{rel}(0) + h_{rel}(1) =$ $\frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$...	$H_c(7) = \sum_{i=0}^7 h_{rel}(i) =$ $h_{rel}(0) + \dots + h_{rel}(7)$ $= \frac{5}{16} + \dots + 0 = 1$

Schritt #3: Grafik der kumulativen Verteilungsfunktion erstellen



Aufgabe U1: (#c)

Schritt #1: alle Werte (d.h. Elemente unserer Matrix) aufsteigend sortieren

0	3	1	3
2	0	0	3
3	3	0	0
2	1	1	1



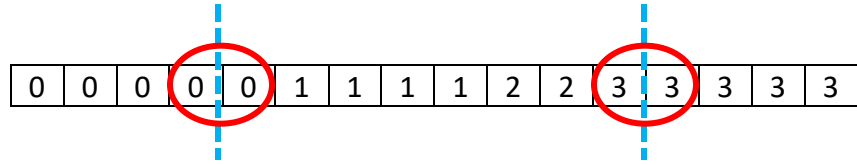
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Schritt #2: der Median \tilde{x} einer geordneten Stichprobe (x_1, x_2, \dots, x_n) lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{m+1} & \text{für ungerades } n = 2m+1 \\ \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}) & \text{für gerades } n = 2m \end{cases}$$

Aufgabe U1: (#d)

Schritt #1: alle Werte (d.h. Elemente unserer Matrix) aufsteigend anordnen



Schritt #2: für jede Zahl $0 \leq p \leq 1$, ein p -Quantil einer geordneten Stichprobe (x_1, x_2, \dots, x_n) lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$x_p = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p + 1}), & \text{falls } n \cdot p \text{ ganzzahlig} \\ (x_{\lfloor n \cdot p \rfloor + 1}), & \text{falls } n \cdot p \text{ nicht ganzzahlig} \end{cases}$$

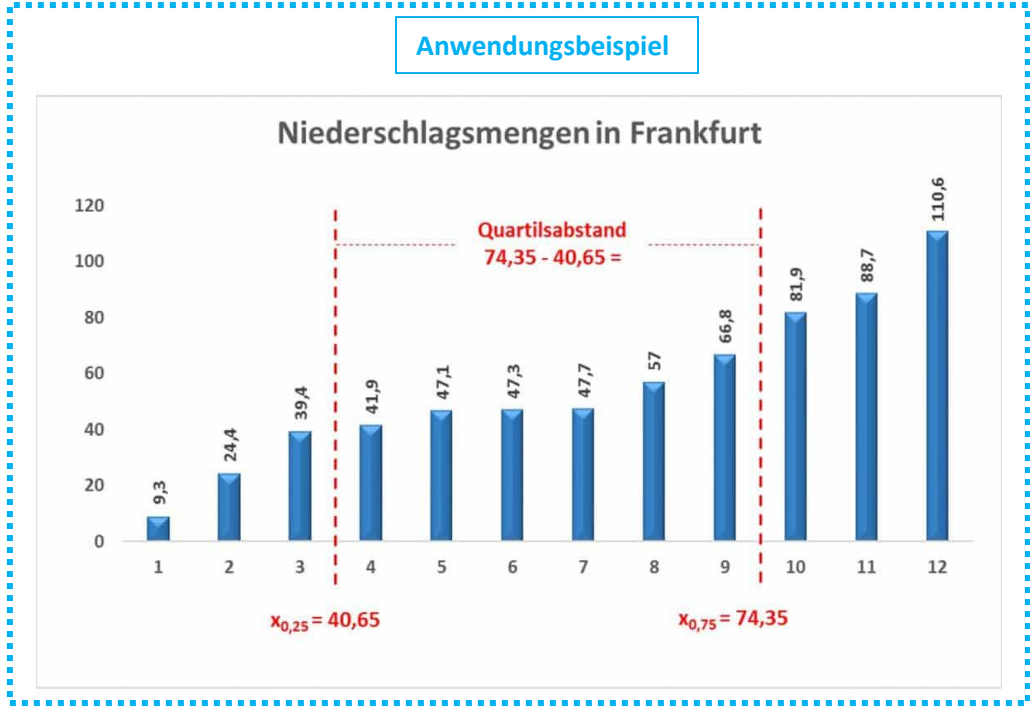
Abrundungsfunktion

Schritt #3: Begriffe begreifen ☺

- das untere Quartil ist ein 0.25-Quantil (also $x_{\frac{1}{4}}$)
- das obere Quartil ist ein 0.75-Quantil (also $x_{\frac{3}{4}}$)
- der Quartilabstand QrA wird dann wie folgt berechnet: $QrA = \left| x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}} \right|$

Schritt #4: unser Beispiel

- $n = 16, p = 0.25 \Rightarrow n \cdot p = 4$: $x_{0.25} = \frac{1}{2} \cdot (x_4 + x_5) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 0) = 0$
- $n = 16, p = 0.75 \Rightarrow n \cdot p = 12$: $x_{0.75} = \frac{1}{2} \cdot (x_{12} + x_{13}) = \frac{1}{2} \cdot (3 + 3) = 3$
- Quartilabstand: $x_{0.75} - x_{0.25} = 3 - 0 = 3$



Aufgabe U1: (#e)

Schritt #1: Formeln zu Berechnung von Mittelwerten und Standardabweichungen

- Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Schritt #2: Anwendung der Formeln für unser Beispiel:

- Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{16} (0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + \dots + 7 \cdot 0) = \dots = 1.4375 = \frac{1}{16} (0 \cdot h_{abs}(0) + 1 \cdot h_{abs}(1) + 2 \cdot h_{abs}(2) + \dots + 7 \cdot h_{abs}(7)) = \sum_{w=0}^7 w \cdot h_{rel}(w)$$

- Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16-1} \sum_{i=1}^{16} (x_i - 1.4375)^2} = \dots = 1.263 \dots = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{w=0}^7 (w - \bar{x})^2 \cdot h_{abs}(w)} \approx \sqrt{\sum_{w=0}^7 (w - \bar{x})^2 \cdot h_{rel}(w)}$$

Warum?

informale Randbemerkung:
je größer n , umso $\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n-1}$

Hausaufgabe #1_von_3 (kein Muss)

Lösungen – überprüft's zu Hause ☺

Aufgabe U1: (#f)

Schritt #1: Formeln zu Berechnung von Schiefe und Kurtosis

Schiefe	Exzess aka „Kurtosis –3“ aka „Wölbung –3“
$g_m = \frac{m_3}{s^3}$ $m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$ $s^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^3$	$g_k = \frac{m_4}{s^4} - 3$ $m_4 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^4$ $s^4 = \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^4$

Schritt #2: Ergebnisinterpretation

positive Schiefe ☺	negative Schiefe ☹	positiver Exzess ☺	negativer Exzess ☹

Schritt #3: unser Beispiel

- Schiefe:

$$\frac{1}{n \cdot s^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 = \text{Werte einsetzen} = 0.14488 \dots = \frac{1}{n \cdot s^3} \sum_{w=0}^7 (w - \bar{x})^3 \cdot h_{abs}(w) \approx \frac{1}{s^3} \sum_{w=0}^7 (w - \bar{x})^3 \cdot h_{rel}(w)$$

- Kurtosis:

$$\frac{1}{n \cdot s^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3 = \text{Werte einsetzen} = -1.56198 \dots = \frac{1}{n \cdot s^4} \sum_{w=0}^7 (w - \bar{x})^4 \cdot h_{abs}(w) \approx \frac{1}{s^4} \sum_{w=0}^7 (w - \bar{x})^4 \cdot h_{rel}(w)$$

Bildanalyse und Bildverstehen			Georg-August-Universität Göttingen SoSe 22
Fragen/Anregungen zum Stoff? ⇒ 24/7-Support ☺ unter jeos@mail.com emailen			
WARMUP-Runde	Lösungen #01	Prof. Winfried Kurth / Alex Tavkheldize	

Aufgabe U1: (#g)

Schritt #1: Grundidee und Formel hinter dem Begriff „Entropie“

Entropie ist, in groben Zügen, ein Überraschungsgrad, in anderen Worten, ein Maß für Ungewissheit, das durch ein **mittleres Informationsgehalt** dargestellt und berechnet wird:

$$Ent = \sum_{w \in W} h_{rel}(w) \cdot \log\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right)$$

Das Glied $\log\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right)$ stellt die minimale Anzahl von benötigten Bits dar, mit dem Ziel alle Vorkommen von dem Intensitätswert w eindeutig kodieren zu können.

Bedeutung für Bildanalyse | Hier kommt ein kurzer Satz von euch (**Hausaufgabe #2 von 3**). Tipp: ... Kompression ...

Schritt #2: Entropieberechnung für unser Beispiel

$$Entr = \sum_{w=0}^7 h_{rel}(w) \cdot \log_2\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right) = - \sum_{w=0}^7 h_{rel}(w) \cdot \log_2(h_{rel}(w)) = - \left(\frac{5}{16} \cdot \log_2\left(\frac{5}{16}\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} \cdot \log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{5}{16} \cdot \log_2\left(\frac{5}{16}\right) \right) \approx 1.924 \dots$$

Aufgabe U1: (#h)

Schritt #1: Grundidee und Formel hinter dem Begriff „Anisotropie“

Anisotropiekoeffizient misst den **Anteil der Entropie** einer gewissen Spanne von Intensitätswerten (meistens sind es 50% der **kleinsten** Intensitätswerten) an gesamter Entropie:

$$Anisotr = \frac{1}{Entr} \cdot \sum_{w=0}^{\tilde{x}} h_{rel}(w) \cdot \log\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right)$$

\tilde{x} steht für den **Medianwert** von Intensitätswerten.

Bedeutung für Bildanalyse | Hier kommt ein kurzer Satz von euch (**Hausaufgabe #3 von 3**). Tipp: ... Symmetrie ...

Schritt #2: Anisotropieberechnung für unser Beispiel

$$Anisotr = \frac{1}{Entr} \cdot \sum_{w=0}^1 h_{rel}(w) \cdot \log\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right) = - \frac{1}{1.924 \dots} \cdot \left(\frac{5}{16} \cdot \log_2\left(\frac{5}{16}\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \right) = \text{rechnet es aus}$$

Aufgabe U1: (#i)

Schritt #1: Definition

$$M_{PG} = \{m_{i,k}\}_{i,k \in W} = \left\{ \left| \left\{ (x,y) : w(x) = i \wedge w(y) = k \wedge xRy \right\} \right| \right\}$$

Komponenten der Formel:

- W ist die Menge der Grau-/Farbwerte
- $|\{\cdot\}|$ stellt die Kardinalität (Anzahl der Elemente) einer Menge dar
- (x, y) steht für ein Pixelpaar und beispielsweise $w(x) = i$ heißt „das Pixel x hat den Grau-/Farbwert i “
- der Ausdruck xRy lässt sich folgendermaßen verstehen: „das Pixel x steht in Relation R mit dem Pixel y “

Schritt #2: wir bilden diese Matrix für unser Beispiel

Angaben:

- $W = \{0,1,2,3\}$
- $R =$ „rechter Nachbar“: $xRy = x[Z_x; S_x] R y[Z_y; S_y]$, wobei $Z_x = Z_y \wedge S_x = S_y + 1$
- Pixelmenge: unser Blaukanal in einem Koordinatensystem

Z\S	0	1	2	3
0	0	3	1	3
1	2	0	0	3
2	3	3	0	0
3	2	1	1	1

dadurch wird die Größe der quadratischen **PG-Matrix** bestimmt:

in diesem Fall, da $|W| = 4$, wir bekommen ein **4x4** Zahlengitter

Berechnung einzelner Elemente der Matrix	Paar-Grauwertematrix
$m_{0,0} = \left \left\{ (x,y) : w(x) = 0 \wedge w(y) = 0 \wedge "x \text{ ist rechts von } y" \right\} \right $ $= \left \{(x[1;2], y[1;1]), (x[2;3], y[2;2])\} \right = 2$	$M_{PG} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$m_{3,1} = \left \left\{ (x,y) : w(x) = 3 \wedge w(y) = 1 \wedge "x \text{ ist rechts von } y" \right\} \right $ $= \left \{(x[0;3], y[0;2])\} \right = 1$	
...	

Randbemerkung / Trick: einfach die obige M_{PG} Matrix [transponieren](#) und die PG -Matrix für die Relation „linker Nachbar“ genießen ☺