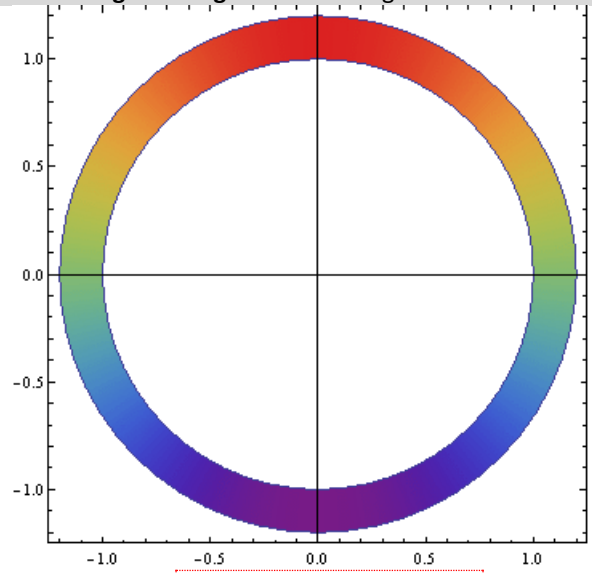
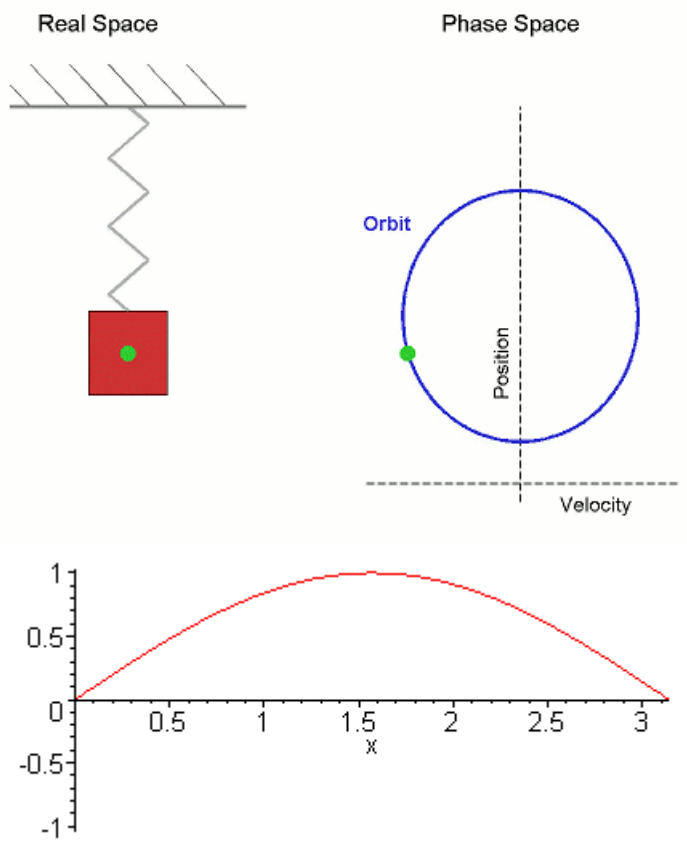


Aufgabenstellungen:	Übungen_02	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia17_ub03.pdf
	Übungsblatt_02	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia21_ue02.pdf

Aufgabe U3:

Schritt #1: Fouriertransformation – ein wenig „Etymologie/Evolution“

Harmonische Schwingungen: Federpendel, Saitenschwingung **Fouriersche Fragestellung:** Wärmeleitung innerhalb eines Drahtes



PDE: $\frac{\partial y}{\partial t} = \text{Drahtmaterial} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$
Fourier-Reihe: $y(\theta, t) = \sum_n c_n(t) \cdot e^{2\pi i n \theta}$
ODE: $c_n'(t) = -2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot c_n(t)$

Fourierkoeffizienten in der linearen Dekomposition der ursprünglichen Wärmeverteilungsfunktion über **basische Funktionen** (hier: komplexe Exponenten $e^{2\pi i n x}$):
 $y(\theta, 0) = \sum_n K_n \cdot e^{2\pi i n \theta}$, wobei $K_n = \int_0^{2\pi} y(\theta, 0) \cdot e^{-2\pi i n \theta} d\theta$

(analytische) Lösung

$y(t) = K \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

$y(\theta, t) = \sum_n K_n \cdot e^{-2\pi^2 \cdot n^2 \cdot t} \cdot e^{2\pi i n \theta}$

K – Amplitude (Länge)	ω – (Kreis)Frequenz
φ – Anfangsphase (Winkelposition)	t – Zeitpunkt

Gilt für periodische Funktionen $y(\cdot)$

Aufgabe U3:

Schritt #2: [Randbemerkung] komplexe Exponenten bilden eine Orthonormalbasis:

im Hilbertraum $\mathcal{L}^2([0; 2\pi])$ der quadratintegrierbaren Funktionen | im $\mathcal{L}^1(G)$ für jede kompakte kommutative Gruppe G

Abbildung mit Projektionen	Formeln	
	Eulersche Formel:	$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$
	$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2 \cdot i}$
	komplexe Exponenten $[n \in \mathbb{N}]$:	$e_n(t) = e^{2\pi i n t}$
	inneres Produkt (ist eine zweistellige Operation) von komplexen Exponenten:	$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \int_0^{2\pi} e^{2\pi i n t} \cdot e^{-2\pi i m t} dt$
	Orthonormalität von $\{e_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$:	$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Platz für Werbung ☺		

Schritt #3: zweidimensionale (aka 2D) **D**iskrete **F**ourier**T**ransformation eines Bildes $\{f(z, s)\}_{z=0..Z-1; s=0..S-1}$ der Größe $Z \times S$

Normalerweise, von der gleichen Größe $Z \times S$:

$u = 0..Z-1$	$v = 0..S-1$
--------------	--------------

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Konstante} \cdot \sum_{z=0}^{Z-1} \sum_{s=0}^{S-1} f(z, s) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{z \cdot u}{Z} + \frac{s \cdot v}{S})} = K \cdot \sum_{z=0}^{Z-1} \left(\sum_{s=0}^{S-1} f(z, s) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{s \cdot v}{S})} \right) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{z \cdot u}{Z})}$$

	bei 2D-DFT	bei Rücktransformation aka DFT^{-1} aka 2D-IDFT
normalisiert	$\text{Konstante} = \frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}}$	$\frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}}$
	$\frac{1}{Z \cdot S}$	1
	1	$\frac{1}{Z \cdot S}$

schaut nach **zwei** verschachtelten 1D-DFTs aus...

Grundidee für 2D-FFT
[„schnelle“ 2D-DFT Berechnung]

Aufgabe U3:

Schritt #3: Annäherung von periodischen Funktionen durch **Fourier-Reihen** – einfaches 1D-Beispiel im Blickfeld

- etwas Mathe als Vorspeise ☺:

periodische Funktion $f(x)$, mit der Periodenlänge T [Frequenz $F = 1/T$]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cdot \cos(2\pi Fx) + b_n \cdot \sin(2\pi Fx))$$

DC-Komponente [aka Nullfrequenz]

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$$

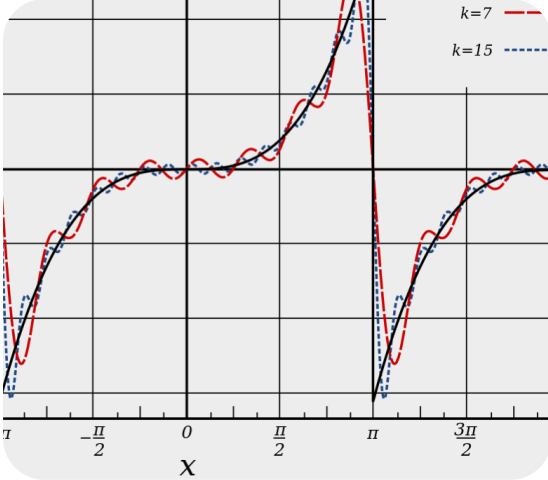
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos(2\pi Fx) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin(2\pi Fx) dx$$

Quelle: Wikibooks

$$f(x) = x^3$$

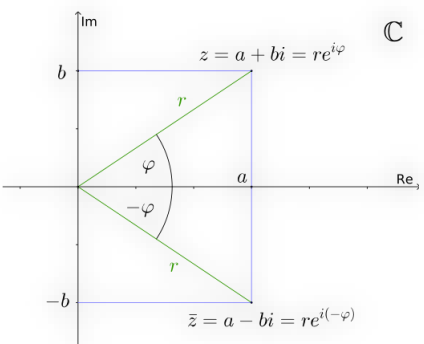
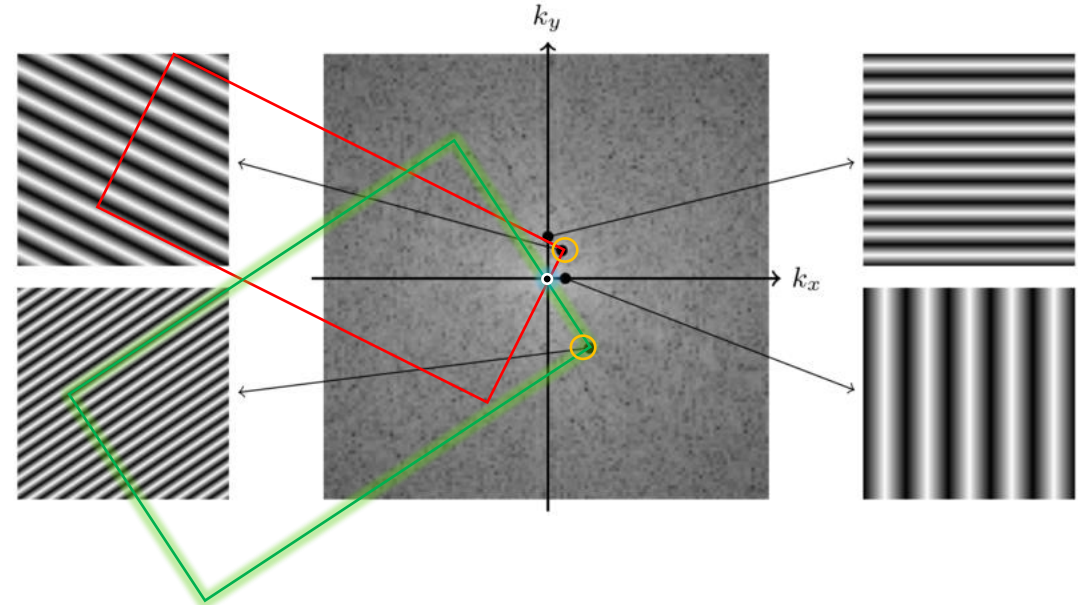
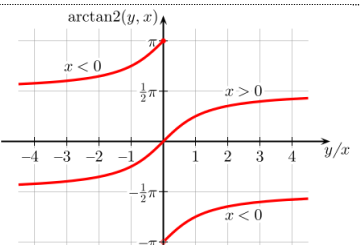
$$f(x) = \sum_{n=1}^k \left(\frac{-2(-1)^n}{n^3} \cdot (\pi^2 \cdot n^2 - 6) \cdot \sin(nx) \right)$$



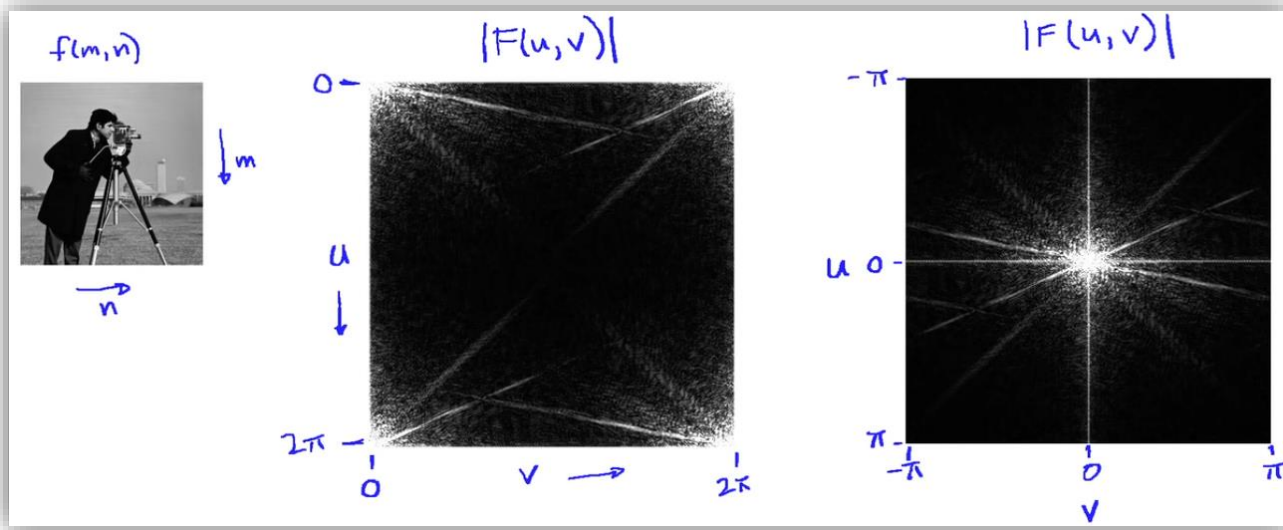
Aufgabe U3:

Schritt #3: berühmtes Kameramann-Bild – 2D-DFT Cheatsheet

Quelle: Wiki

Darstellungskanäle einer komplexen Zahl $z = x + i \cdot y = re^{i\varphi}$		Bausteine der 2D-DFT-Analyse – 2D Sinusoide im Frequenzraum	
	Realer Anteil: $\text{Re}(z) = x = r \cdot \cos(\varphi)$		
	Imaginärer Anteil: $\text{Im}(z) = y = r \cdot \sin(\varphi)$		
	Betrag: $r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$		
	Phase: $\varphi = \arctan2(y, x)$		

Quelle: Van Veen



Aufgabe U3:

Schritt #4: Lösung der Aufgabe

(a) Schritt #1: **Basismatrizen** aus unserer Formel für 2D-DFT

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Konstante} \cdot \sum_{z=0}^{Z-1} \sum_{s=0}^{S-1} f(z, s) \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{z \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v}}{Z \cdot S})} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \mathbf{B}_{z,s}; \mathbf{B}_{z,s} = \{ \mathbf{B}_{z,s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \}_{\substack{\mathbf{u}=0..Z-1 \\ \mathbf{v}=0..S-1}} = \left\{ e^{-2\pi i \cdot (\frac{z \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v}}{Z \cdot S})} \right\}_{\substack{\mathbf{u}=0..Z-1 \\ \mathbf{v}=0..S-1}} \right\}_{\substack{z=0..Z-1 \\ s=0..S-1}}$$

Schritt #2: für unser Beispiel, $z, s \in \{0, 1\}$ - von daher, die Basis besteht aus $|\{0,1\}|^2 = 4$ Matrizen $\{\mathbf{B}_{0,0}, \mathbf{B}_{0,1}, \mathbf{B}_{1,0}, \mathbf{B}_{1,1}\}$, wobei:

$\mathbf{B}_{0,0} = \left\{ e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{v}}{Z \cdot S})} \right\}_{\substack{\mathbf{u}=0,1 \\ \mathbf{v}=0,1}} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{Z \cdot S})} & e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{Z \cdot S})} \\ e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{Z \cdot S})} & e^{-2\pi i \cdot (\frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{Z \cdot S})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \cdot 0} & e^{-2\pi i \cdot 0} \\ e^{-2\pi i \cdot 0} & e^{-2\pi i \cdot 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 \\ e^0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{B}_{0,1} = \dots \quad \mathbf{B}_{1,0} = \dots \quad \mathbf{B}_{1,1} = \dots$ rechnet selber aus ☺
---	---

Hausaufgabe für Mathe-Fans ☺: warum $e^0 = 1$?

(b) Schritt #1: zu zeigen ist

$$\frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}} \cdot \sum_{\mathbf{u}=0}^1 \sum_{\mathbf{v}=0}^1 B_{z_1, s_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \overline{B_{z_2, s_2}(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{B}_{z_1, s_1}; \mathbf{B}_{z_2, s_2} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } (z_1, s_1) = (z_2, s_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Schritt #2: na dann los ☺ [alternativer Lösungsweg: da es insgesamt nur 4 Matrizen gibt, man könnte die Ergebnisse für alle möglichen Paare explizit ausrechnen]

$$\frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z \cdot S}} \cdot \sum_{\mathbf{u}=0}^{Z-1} \sum_{\mathbf{v}=0}^{S-1} B_{z_1, s_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \overline{B_{z_2, s_2}(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \sum_{\mathbf{u}=0}^{Z-1} \sum_{\mathbf{v}=0}^{S-1} e^{-2\pi i \cdot (\frac{z_1 \cdot \mathbf{u} + s_1 \cdot \mathbf{v}}{Z \cdot S})} \cdot e^{2\pi i \cdot (\frac{z_2 \cdot \mathbf{u} + s_2 \cdot \mathbf{v}}{Z \cdot S})} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \sum_{\mathbf{u}=0}^{Z-1} \sum_{\mathbf{v}=0}^{S-1} e^{2\pi i \cdot (\frac{(z_2 - z_1) \cdot \mathbf{u}}{Z} + \frac{(s_2 - s_1) \cdot \mathbf{v}}{S})} =$$

Hausaufgabe für Mathe-Fans ☺: für $z \in \mathbb{C}$ und anhand $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, beweist $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

$$\frac{1}{Z \cdot S} \cdot \sum_{\mathbf{u}=0}^{Z-1} e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot \mathbf{u}}{Z}} \cdot \sum_{\mathbf{v}=0}^{S-1} e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot \mathbf{v}}{S}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (z_1, s_1) = (z_2, s_2) \\ \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z - 1}{Z}} \cdot e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S - 1}{S}}}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z - 1}{Z}} \cdot e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S - 1}{S}}} & \text{sonst} \\ \frac{1}{Z} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z - 1}{Z}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z - 1}{Z}} - 1} & \text{falls } z_1 \neq z_2 \wedge s_1 = s_2 \\ \frac{1}{S} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S - 1}{S}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S - 1}{S}} - 1} & \text{falls } s_1 \neq s_2 \wedge z_1 = z_2 \end{cases}$$

Hausaufgabe: warum?

$$\frac{1}{Z \cdot S} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z - 1}{Z}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z - 1}{Z}} - 1} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S - 1}{S}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S - 1}{S}} - 1} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \frac{e^{2\pi i \cdot (z_2 - z_1)} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z - 1}{Z}} - 1} \cdot \frac{e^{2\pi i \cdot (s_2 - s_1)} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S - 1}{S}} - 1} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot \frac{1 - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (z_2 - z_1) \cdot Z - 1}{Z}} - 1} \cdot \frac{1 - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot (s_2 - s_1) \cdot S - 1}{S}} - 1} = \frac{1}{Z \cdot S} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Tipp zu ☺: Summenformel für [geometrische Reihen...](#)



Aufgabe U3:

(c) Schritt #1: unsere Bildmatrix

$$(f_{jk}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Schritt #2: die DFT-Bildmatrix elementweise berechnen

$$DFT(f_{jk}) = (g_{mn}) = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{bmatrix}:$$

$$g_{mn} = \frac{1}{2 \cdot 2} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2}m + \frac{k}{2}n)} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2}m + \frac{k}{2}n)}$$

$$g_{00} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2} \cdot 0 + \frac{k}{2} \cdot 0)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{0}{2} \cdot 0 + \frac{0}{2} \cdot 0)} + 2 \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{0}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0)} + 3 \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{0}{2} \cdot 0)} + 4 \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0)}) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 2.5$$

$$g_{01} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2} \cdot 0 + \frac{k}{2} \cdot 1)} = \dots = -0.5$$

$$g_{10} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2} \cdot 1 + \frac{k}{2} \cdot 0)} = \dots = -1$$

$$g_{11} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 f_{jk} \cdot e^{-2\pi i \cdot (\frac{j}{2} \cdot 1 + \frac{k}{2} \cdot 1)} = \dots = 0$$

Also:

$$(g_{mn}) = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Randbemerkung:

Normalerweise, bei größeren Bildern, man kriegt eine überwiegend komplexwertige Fourier-Bildmatrix $(g_{mn}) = \begin{bmatrix} a + ib & c + id \\ e + if & g + ih \end{bmatrix}$ - diese lässt sich in 4 verschiedenen (reellwertigen="beobachtbaren") Frequenzräumen beobachten:

Realteil	$Re(g_{mn}) = \begin{bmatrix} a & c \\ e & g \end{bmatrix}$
Imaginärteil	$Im(g_{mn}) = \begin{bmatrix} b & d \\ f & h \end{bmatrix}$

Betrag	$ g_{mn} = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & \sqrt{c^2 + d^2} \\ \sqrt{e^2 + f^2} & \sqrt{g^2 + h^2} \end{bmatrix}$
Phase	$\varphi(g_{mn}) = \begin{bmatrix} \arctan2(b, a) & \arctan2(d, c) \\ \arctan2(f, e) & \arctan2(h, g) \end{bmatrix}$

Aufgabe U4:

(a) **Schritt #1:** Kommutativität von **Faltung** [Spielfeld: **Matrizen**]:

Alternative Formulierung: (es ☺) seien M_1 und M_2 zwei beliebigen Matrizen. Man beweise, dass $M_1 * M_2 = M_2 * M_1$

Beweis: nehmen wir an [**CE**-Ligatur für „Ohne Einschränkung der Allgemeinheit“], für $i \in \{1,2\}$, M_i hat die Größe $z_i \times s_i$

Laut Definition von **2D-Konvolution**:

$$C(i, j) := [M_1 * M_2](i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_1(z, s) \cdot M_2(i-z, j-s)$$

wobei $z_1 + z_2 - 1 \geq i \geq 0 \leq j \leq s_1 + s_2 - 1$

Fun Fact für Mathe Fans ☺: Beweis ist super **kurz und klar** im 1D stetigen Fall sowie auch für Reihen – checkt's [← Hausaufgabe]

🔥 **Lifehack:** bei jeder Faltung $M_1 * M_2$ ist die **zweite Matrix**, M_2 , eine *intuitivere* Wahl für zu verarbeitende Bilder [bzw. M_1 - für Kerne], da diese von (i, j) abhängt und sich deshalb für den Faltungskontext besser eignet – rein verfahrensmäßig kann das Bild (sowie der Kern) beliebige Position in $M_1 * M_2$ übernehmen.

Analogie zur Computergrafik: faltende Maske aus ihrem **Objektraum** wird in den **Weltraum** von zu faltendem stationären Bild gesetzt.

Schritt #2: Kurzentspannung – kleines bisschen von „praktischer Theorie“ ☺:

Beispiel: Matlab

keine feste Ausgabegröße?

Ausgabemodus	Beschreibung	Ausgabegröße
Full Voll	alle möglichen Überlappungen von Bild [hier: M_2] und Maske [aka Kern aka Filter]	$z_1 + z_2 - 1 \times s_1 + s_2 - 1$
Same as Pic Gleich wie Bild	selbsterklärend ☺	$z_2 \times s_2$
Valid Gültig	Maske bleibt innerhalb der Bildgrenzen	$ z_2 - z_1 + 1 \times s_2 - s_1 + 1$

Hausaufgabe: warum?

Schritt #3: weiter mit dem Beweis

$$\sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_1(z, s) \cdot M_2(i-z, j-s) = \sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(z, s) = \sum_{i-z=i}^{i-(z_1-1)} \sum_{j-s=j}^{j-(s_1-1)} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(z, s) =$$

$$\sum_{i-z=i-(z_1-1)}^i \sum_{j-s=j-(s_1-1)}^j M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(i-(i-z), j-(j-s)) = \sum_{i-z=0}^{z_2-1} \sum_{j-s=0}^{s_2-1} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(i-(i-z), j-(j-s)) = [M_2 * M_1](i, j)$$

Warum? (green dashed boxes around indices)



Bei diesem Schritt wird aber folgendes **vorausgesetzt**: $M_1 = 0 = M_2$ sobald man diese Matrizen verlässt [als **Zero Padding** bekannt]

Alternative Formulierung [„formaler Ausdruck“]: $\forall i \in \{1,2\} (x \notin [0; z_i - 1] \cap \mathbb{N} \vee y \notin [0; s_i - 1] \cap \mathbb{N} \Rightarrow M_i(x, y) = 0)$

Bildanalyse und Bildverstehen		Georg-August-Universität Göttingen SoSe 21
Fragen/Anregungen zum Stoff? ⇒ 24/7-Support ☺ unter jeos@mail.com emailen		
Lösungen #03	Prof. Winfried Kurth / Alex Tavkheldze	

Aufgabe U4:

(b) **Schritt #1:** Distributivität von Faltung [in Bezug auf die Matrixaddition]:

Alternative Formulierung: für beliebige Matrizen M, M_1 und M_2 , es gilt:

$$M * (M_1 + M_2) = M * M_1 + M * M_2$$

Implizite Voraussetzung: das Faltungsformat muss fixiert bleiben **und** die M_i müssen gleiche Größe haben – sonst sind die gar nicht addierbar **und** nicht vergleichbar ☺

Schritt #2: los mit dem Beweis

Hausaufgabe: überprüft ob dieser Schritt zulässig ist (für Doppelsummen)

$$\begin{aligned}
 [M * (M_1 + M_2)](i, j) &= \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z, S) \cdot [M_1 + M_2](i - Z, j - S) = \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z, S) \cdot (M_1(i - Z, j - S) + M_2(i - Z, j - S)) = \\
 &= \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z, S) \cdot M_1(i - Z, j - S) + \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z, S) \cdot M_2(i - Z, j - S) = [M * M_1](i, j) + [M * M_2](i, j)
 \end{aligned}$$



Aufgabe U5:

Schritt #1: Lösung der Aufgabe

(a)

auf der Maske – **rechts unten** ⇔ auf dem Bild – **links oben** ⇒ vor Anwendung Maske **umpositionieren**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Faltungsmatrix an einer konkreten Stelle	Bildmatrix (in einem Koordinatensystem) mit dem Mittelwertfilter drauf																																																																																	
$9 \cdot [K * B](3, 2) = K(0, 0) \cdot B(3, 2) + K(0+1, 0+1) \cdot B(3-1, 2-1) +$ $K(0, 1) \cdot B(3, 1) + K(1, 0) \cdot B(2, 2) +$ $K(0, 2) \cdot B(3, 0) + K(2, 0) \cdot B(1, 2) +$ $K(1, 2) \cdot B(2, 0) + K(2, 1) \cdot B(1, 1) +$ $K(2, 2) \cdot B(1, 0) =$ $1 \cdot B(3, 2) + 1 \cdot B(2, 1) +$ $1 \cdot B(3, 1) + 1 \cdot B(2, 2) +$ $1 \cdot B(3, 0) + 1 \cdot B(1, 2) +$ $1 \cdot B(2, 0) + 1 \cdot B(1, 1) +$ $1 \cdot B(1, 0) =$ $1 + 0 +$ $0 + 1 +$ $0 + 0 +$ $0 + 0 +$ $0 =$ <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block; margin: 10px;"> $0 + 0 + 0 +$ $0 + 0 + 1 +$ $0 + 0 + 1 =$ 2 </div> <p>übersichtlicher umgruppiert</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Z/S</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	Z/S	0	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	1	1	1	0	0	3	0	0	1	1	1	1	0	0	4	0	0	1	1	1	1	0	0	5	0	0	1	1	1	1	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0
Z/S	0	1	2	3	4	5	6	7																																																																										
0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																										
1	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																										
2	0	0	1	1	1	1	0	0																																																																										
3	0	0	1	1	1	1	0	0																																																																										
4	0	0	1	1	1	1	0	0																																																																										
5	0	0	1	1	1	1	0	0																																																																										
6	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																										
7	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																										
<p>Von daher: $[K * B](3, 2) = \frac{2}{9}$</p>	<div style="border: 1px solid green; padding: 5px; display: inline-block;"> Hausaufgabe: rechnet andere Stellen [im „Valid“ Faltungsmodus] selber aus </div>																																																																																	

Randbemerkung zur Umpositionierung der Faltungsmaske:

2D **Rot**ationen und 2D **Sp**iegelungen [um den Koordinatenursprung] bilden eine **Gruppe** mit folgenden unkompliziert beweisbaren Eigenschaften:

$$Sp(\leftrightarrow) \cdot Sp(\updownarrow) = Rot(\pi) = Rot(-\pi) = Sp(\updownarrow) \cdot Sp(\leftrightarrow) \quad \text{und} \quad Sp(\nearrow) \cdot Sp(\nwarrow) = Rot(\pi) = Rot(-\pi) = Sp(\nwarrow) \cdot Sp(\nearrow)$$

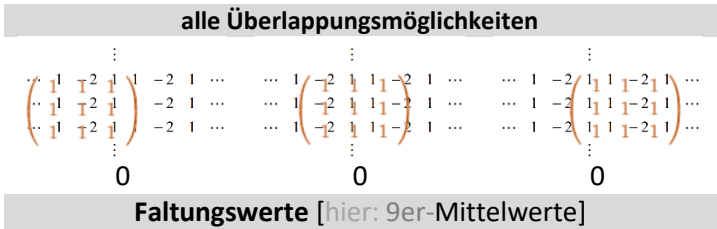
Diese Eigenschaften bieten diverse Möglichkeiten (siehe 6 davon in der obigen Zeile) um eine **Faltungsmaske** vor dem „Gleiten“ **korrekt zu positionieren**.

Aufgabe U5:

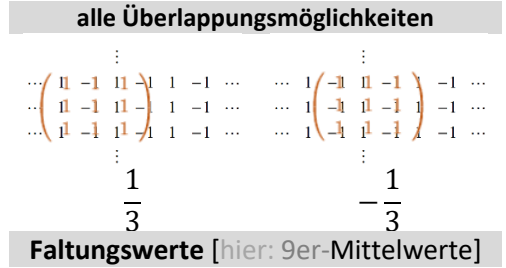
(b)

In gleicher Weise wie [oben](#):

$$K * \text{Geräusch \#1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{matrix} \vdots \\ \dots 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \dots 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \dots 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots \end{matrix}, \text{ weil}$$



$$K * \text{Geräusch \#2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{matrix} \vdots \\ \dots 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} \dots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots \end{matrix}, \text{ weil}$$



Eignung als Tiefpassfilter [aka **LPF** aka **Glättungsfiler**]:

- Geräusch #1 wird komplett entfernt – „best ever“ **low-pass filter** ☺
- Geräusch #2 wird gedrittelt, also deutlich vermindert – „so lala“ **Tiefpassfilter** ☺

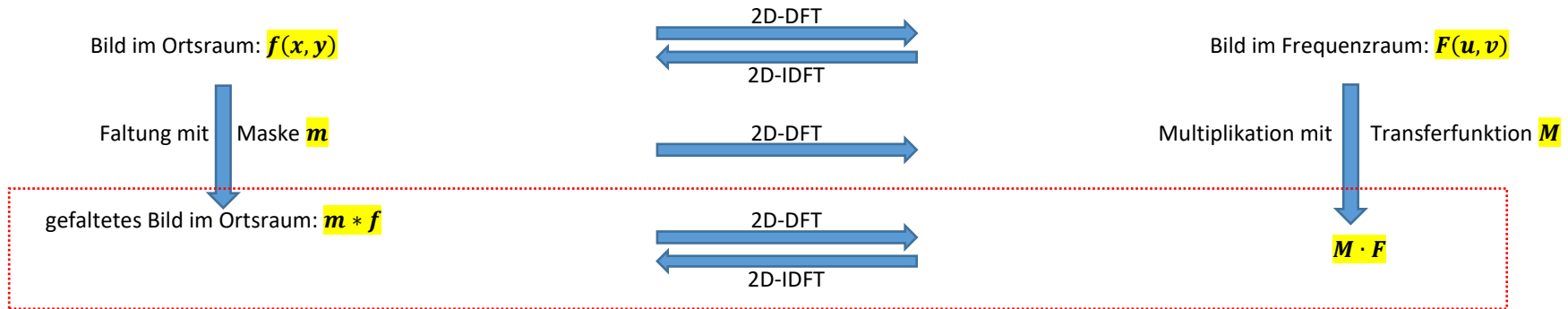
Beispiele:



Aufgabe U5:

Schritt #2: kurzes Schlusswort zum Thema „Faltung“

(a) DFT ⇔ Faltung – diagrammatische Veranschaulichung:



(b) Warum muss die Faltungsmaske (vor der tatsächlichen Anwendung, d.h. vor dem „Gleiten“ übers Bild) gespiegelt werden? – Sonst scheitert der Übergang:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s(t+x)} g(t) dt \right) f(x) dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s u} g(u-x) du \right) f(x) dx$$

Im Prinzip... Alles ist möglich ☺:

- **Faltung:**

$$C(i, j) = [K * B](i, j) = \sum_{z=0}^{z_K-1} \sum_{s=0}^{s_K-1} K(z, s) \cdot B(i-z, j-s)$$

- **Kreuzkorrelation:**

$$CC(i, j) = [K \otimes B](i, j) = \sum_{z=0}^{z_K-1} \sum_{s=0}^{s_K-1} K(z, s) \cdot B(i+z, j+s)$$

Alles hat aber seinen Zweck... und diese sind nicht zu verwechseln

Hausaufgabe: checkt ob Kreuzkorrelation kommutativ ist