Übungsblatt #01: http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia_ub01.pdf

---

Aufgabe U1: (#a)

Schritt #1: den Blaukanal extrahieren

0	0	0	1	2	3	3	5	1	7	7	3
3	2	2	2	2	0	0	0	0	4	5	3
1	2	3	4	5	3	6	7	0	0	0	0
2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	2	1

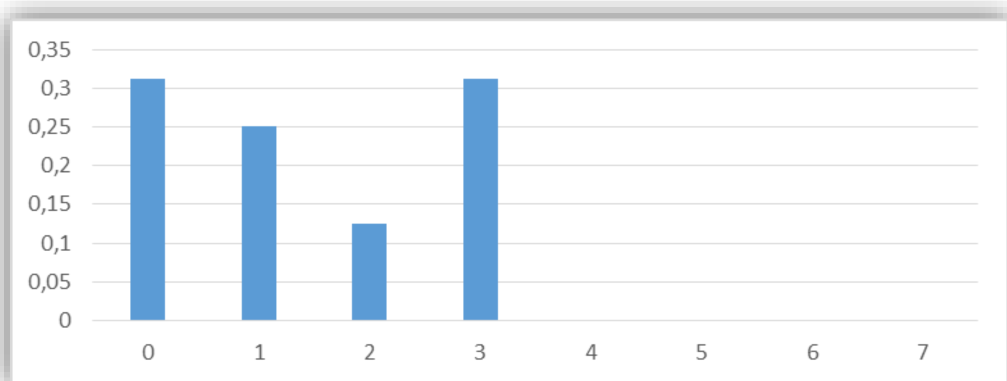
→

0	3	1	3
2	0	0	3
3	3	0	0
2	1	1	1

Schritt #2: Hilfstabelle ausfüllen

Intensitätswert	0	1	2	3	4	5	6	7
h_{abs}	5	4	2	5	0	0	0	0
h_{rel}	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	0	0	0	0

Schritt #3: Histogramm erstellen



Aufgabe U1: (#b)

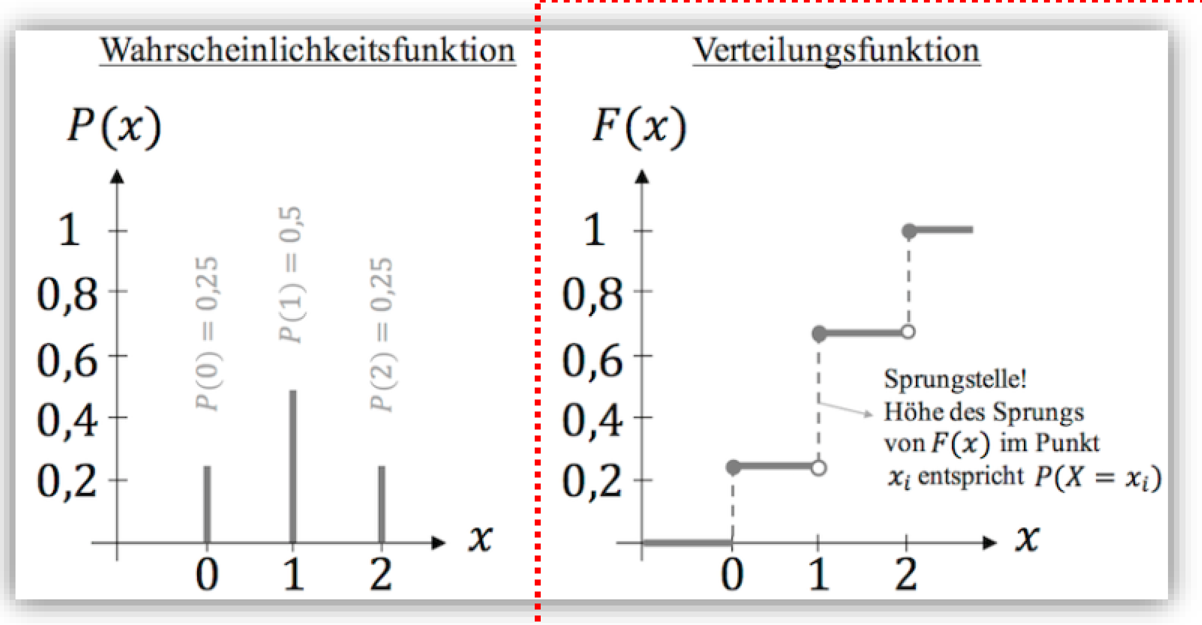
Schritt #1: Formel der kumulierten Wahrscheinlichkeit (W steht für unsere (Farb)Intensitätswerte):

$$H_c(w) = \sum_{i=0}^{w} h_{rel}(i)$$

Schritt #2: Beispiel – Berechnung an unseren diskreten Stellen

Argument (w)	0	1	…	7
Funktionswert ($H_c(w)$)	$\boldsymbol{H_c(0)} = \sum_{i=0}^{0} h_{rel}(i) = h_{rel}(0) = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$	$\boldsymbol{H_c(1)} = \sum_{i=0}^{1} h_{rel}(i) = h_{rel}(0) + h_{rel}(1) = \frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{9}{16}}$	…	$\boldsymbol{H_c(7)} = \sum_{i=0}^{7} h_{rel}(i) = h_{rel}(0) + \cdots + h_{rel}(7) = \frac{5}{16} + \cdots + 0 = \boldsymbol{1}$

Schritt #3: Grafik der kumulativen Verteilungsfunktion erstellen



Aufgabe U1: (#c)

Schritt #1: alle Werte (d.h. Elemente unserer Matrix) aufsteigend sortieren

0	3	1	3
2	0	0	3
3	3	0	0
2	1	1	1

0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3

Schritt #2: der Median $\tilde{x}$ einer geordneten Stichprobe $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{m+1} & \text{für ungerades n} = 2\text{m}+1 \\ \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}) & \text{für gerades n} = 2\text{m} \end{cases}$$

Aufgabe U1: (#d)

Schritt #1: alle Werte (d.h. Elemente unserer Matrix) aufsteigend anordnen

0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3

Schritt #2: für jede Zahl $0 \leq p \leq 1$, ein p-Quantil einer geordneten Stichprobe $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$x_p = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p + 1}), & falls \quad n \cdot p \quad ganzzahlig \\ (x_{\underbrace{ganzahl(n \cdot p)}_{\text{Abrundungsfunktion}} + 1}), & falls \quad n \cdot p \quad nicht \quad ganzzahlig \end{cases}$$

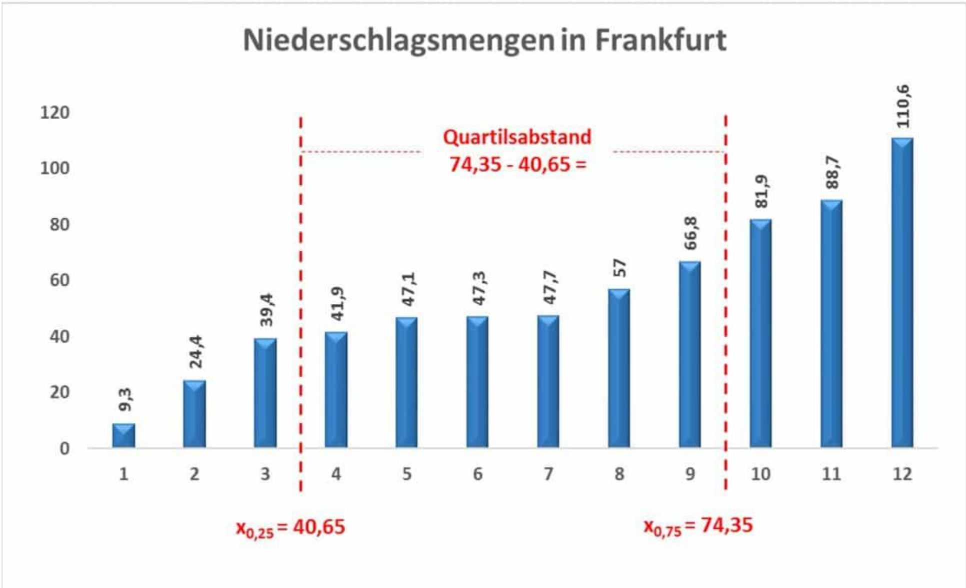
Schritt #3: Begriffe begreifen ☺

- das untere Quartil ist ein 0.25-Quantil (also $x_{\frac{1}{4}}$)
- das obere Quartil ist ein 0.75-Quantil (also $x_{\frac{3}{4}}$)
- der Quartilabstand QrA wird dann wie folgt berechnet: $QrA = \left| x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}} \right|$

Schritt #4: unser Beispiel

- $n = 16, p = 0.25 \;\Rightarrow n \cdot p = 4: \quad x_{0.25} = \frac{1}{2} \cdot (x_4 + x_5) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 0) = 0$
- $n = 16, p = 0.75 \;\Rightarrow n \cdot p = 12: \quad x_{0.75} = \frac{1}{2} \cdot (x_{12} + x_{13}) = \frac{1}{2} \cdot (3 + 3) = 3$
- Quartilabstand: $x_{0.75} - x_{0.25} = 3 - 0 = 3$

Anwendungsbeispiel



Aufgabe U1: (#e)

Schritt #1: Formeln zu Berechnung von Mittelwerten und Standardabweichungen

- Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Warum?

Hausaufgabe_#1_von_3 (kein Muss)

informale **Randbemerkung**:
je größer $\boldsymbol{n}$, umso $\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n-1}$

Schritt #2: Anwendung der Formeln für unser Beispiel:

- Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{16}(0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + \cdots + 7 \cdot 0) = \cdots = 1.4375 = \frac{1}{16}\big(0 \cdot h_{abs}(0) + 1 \cdot h_{abs}(1) + 2 \cdot h_{abs}(2) + \cdots + 7 \cdot h_{abs}(7)\big) = \sum_{w=0}^{7} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{h_{rel}}(\boldsymbol{w})$$

- Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16-1}\sum_{i=1}^{16}(x_i - 1.4375)^2} = \cdots = 1.596\ldots = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{w=0}^{7}(w - \bar{x})^2 \cdot h_{abs}(w)} \approx \sqrt{\sum_{w=0}^{7}(\boldsymbol{w} - \bar{\boldsymbol{x}})^2 \cdot \boldsymbol{h_{rel}}(\boldsymbol{w})}$$

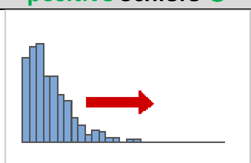
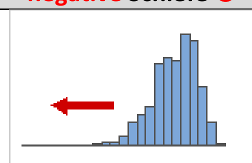
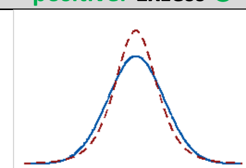
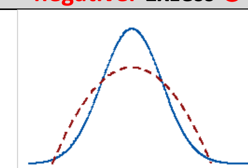
Lösungen – überprüft's zu Hause ☺

Aufgabe U1: (#f)

Schritt #1: Formeln zu Berechnung von Schiefe und Kurtosis

Schiefe	**Exzess** aka „Kurtosis −3“ aka „Wölbung −3“
$g_m = \boxed{\frac{m_3}{s^3}}$	$g_k = \boxed{\frac{m_4}{s^4} - 3}$
$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_n - \bar{x})^3$	$m_4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^4$
$s^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)^3$	$s^4 = \left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)^4$

Schritt #2: Ergebnisinterpretation

positive Schiefe ☺	negative Schiefe ☹	positiver Exzess ☺	negativer Exzess ☹
			

Schritt #3: unser Beispiel

- Schiefe:

$$\frac{1}{n \cdot s^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 = Werte\ einsetzen = 0.132\ldots = \frac{1}{n \cdot s^3}\sum_{w=0}^{7}(w - \bar{x})^3 \cdot h_{abs}(w) \approx \boldsymbol{\frac{1}{s^3}\sum_{w=0}^{7}(w - \bar{x})^3 \cdot h_{rel}(w)}$$

- Kurtosis:

$$\frac{1}{n \cdot s^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4 - 3 = Werte\ einsetzen = -1.730 = \frac{1}{n \cdot s^4}\sum_{w=0}^{7}(w - \bar{x})^4 \cdot h_{abs}(w) \approx \boldsymbol{\frac{1}{s^4}\sum_{w=0}^{7}(w - \bar{x})^4 \cdot h_{rel}(w)}$$

Aufgabe U1: (#g)

Schritt #1: Grundidee und Formel hinter dem Begriff „Entropie"

Entropie ist, in groben Zügen, ein Überraschungsgrad, in anderen Worten, ein Maß für Ungewissheit, das durch ein **mittleres Informationsgehalt** dargestellt und berechnet wird:

$$Ent = \sum_{w \epsilon W} h_{rel}(w) \cdot \log\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right)$$

Das Glied $\log\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right)$ stellt die minimale Anzahl von benötigten Bits dar, mit dem Ziel alle Vorkommen von dem Intensitätswert w eindeutig kodieren zu können.

Bedeutung für Bildanalyse	Hier kommt ein kurzer Satz von euch (**Hausaufgabe_#2_von_3**). **Tipp**: … Kompression …

Schritt #2: Entropieberechnung für unser Beispiel

$$Entr = \sum_{w=0}^{7} h_{rel}(w) \cdot \log_2\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right) = -\sum_{w=0}^{7} \boldsymbol{h_{rel}(w) \cdot \log_2(h_{rel}(w))} = -\left(\frac{5}{16} \cdot log_2\left(\frac{5}{16}\right) + \frac{1}{4} \cdot log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} \cdot log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{5}{16} \cdot log_2\left(\frac{5}{16}\right)\right) \approx 1.924 \ldots$$

Aufgabe U1: (#h)

Schritt #1: Grundidee und Formel hinter dem Begriff „Anisotropie"

Anisotropiekoeffizient misst den **Anteil der Entropie** einer gewissen Spanne von Intensitätswerten (meistens sind es 50% der kleinsten Intensitätswerten) an gesamter Entropie:

$$Anisotr = \frac{1}{Entr} \cdot \sum_{w=0}^{\tilde{x}} h_{rel}(w) \cdot \log\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right)$$

$\tilde{x}$ steht für den **Medianwert** von Intensitätswerten.

Bedeutung für Bildanalyse	Hier kommt ein kurzer Satz von euch (**Hausaufgabe_#3_von_3**). **Tipp**: … Symmetrie …

Schritt #2: Anisotropieberechnung für unser Beispiel

$$Anisotr = \frac{1}{Entr} \cdot \sum_{w=0}^{1} h_{rel}(w) \cdot \log\left(\frac{1}{h_{rel}(w)}\right) = -\frac{1}{1.924 \ldots} \cdot \left(\frac{5}{16} \cdot log_2\left(\frac{5}{16}\right) + \frac{1}{4} \cdot log_2\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \textit{rechnet es aus}$$

Aufgabe U1: (#i)

Schritt #1: Definition

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{PG}} = \{m_{i,k}\}_{i,k\in W} = \left\{\left|\left\{(x,y):\ w(x) = i \bigwedge w(y) = k \bigwedge xRy\right\}\right|\right\}$$

Komponenten der Formel:

- W ist die Menge der Grau-/Farbwerte
- $|\{\cdot\}|$ stellt die Kardinalität (Anzahl der Elemente) einer Menge dar
- (x,y) steht für ein Pixelpaar und beispielsweise $w(x) = i$ heißt „das Pixel x hat den Grau-/Farbwert i"
- der Ausdruck xRy lässt sich folgendermaßen verstehen: „das Pixel x steht in Relation R mit dem Pixel y"

Schritt #2: wir bilden diese Matrix für unser Beispiel

Angaben:

- $W = \{0,1,2,3\}$
- $R =$ **„rechter Nachbar"**: $xRy = x[\boldsymbol{Z_x};\boldsymbol{S_x}]\ R\ y[\boldsymbol{Z_y};\boldsymbol{S_y}],\ wobei\ \boldsymbol{Z_x} = \boldsymbol{Z_y} \wedge \boldsymbol{S_x} = \boldsymbol{S_y} + \boldsymbol{1}$
- Pixelmenge: unser Blaukanal in einem Koordinatensystem

Z\S	0	1	2	3
0	0	3	1	3
1	2	0	0	3
2	3	3	0	0
3	2	1	1	1

dadurch wird die Größe der quadratischen $\boldsymbol{PG}$-Matrix bestimmt:

in diesem Fall, da $|\cdot| = 4$, wir bekommen ein $\boldsymbol{4x4}$ Zahlengitter

Berechnung einzelner Elemente der Matrix

$$m_{0,0} = \left|\left\{(x,y):\ w(x) = 0 \bigwedge w(y) = 0 \bigwedge \text{"}x\ ist\ rechts\ von\ y\text{"}\right\}\right|$$
$$= |\{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{1};\boldsymbol{2}],\boldsymbol{y}[\boldsymbol{1};\boldsymbol{1}]),(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{2};\boldsymbol{3}],\boldsymbol{y}[\boldsymbol{2};\boldsymbol{2}])\}| = 2$$

…

$$m_{3,1} = \left|\left\{(x,y):\ w(x) = 3 \bigwedge w(y) = 1 \bigwedge \text{"}x\ ist\ rechts\ von\ y\text{"}\right\}\right|$$
$$= |\{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{0};\boldsymbol{3}],\boldsymbol{y}[\boldsymbol{0};\boldsymbol{2}])\}| = 1$$

…

Paar-Grauwertematrix

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{PG}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Randbemerkung / Trick: einfach die obige $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{PG}}$ Matrix transponieren und die $\boldsymbol{PG}$-Matrix für die Relation **"linker Nachbar"** genießen ☺