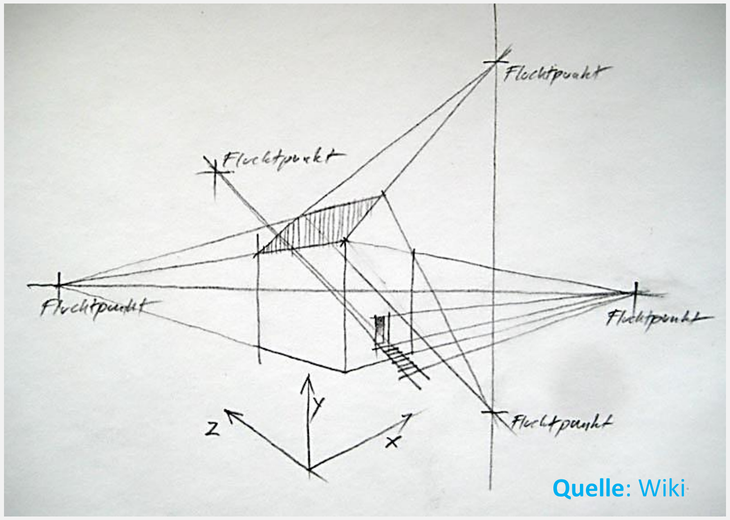
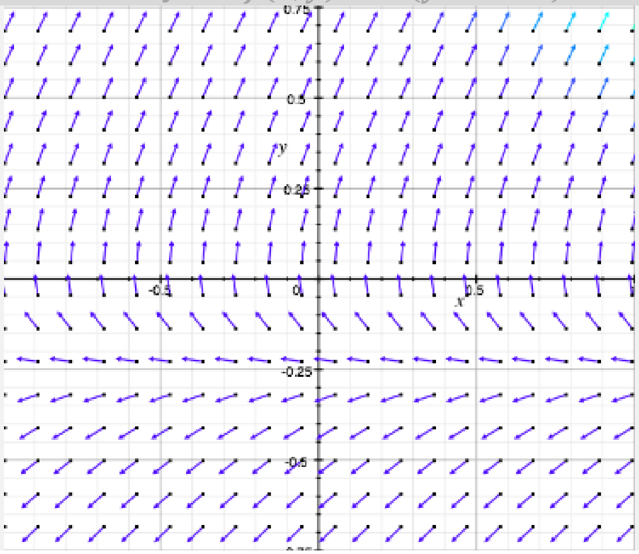
| ***Aufgabenstellungen:***<br>*auch unten auf den Folien, vor jeweiligen Lösungen* | *Übungen_06* | *http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia20_ub08.pdf* |
|---|---|---|

***Die Themenpalette in der heutigen Sitzung:***

| ***modifizierte Hough-Transformation***<br>***#cameramansoldout ☺*** | ***Kanten in Multimerkmalsbildern***<br>***Vektorfeld*** $\nabla f(x,y) = \nabla(y \cdot e^{3x+4y})$ |
|---|---|



## Inhaltsverzeichnis

## Aufgabe U17: *modifizierte Hough-Transformation*

Aufgabenstellung

Die modifizierte Hough-Transformation werde so definiert, dass eine Gerade nicht durch Abstand vom Ursprung und Winkel repräsentiert wird, sondern durch die Koordinaten ihres dem Ursprung nächstliegenden Punktes.

(a) Wie ist diese Transformation rechnerisch durchzuführen?

(b) Eine Geradenschar gehe im Originalbild durch ein- und denselben Punkt *P*. Wo liegen die entsprechenden Punkte nach der modifizierten Hough-Transformation?

(c) Wie kann man den Punkt *P* durch lineare Regression detektieren?

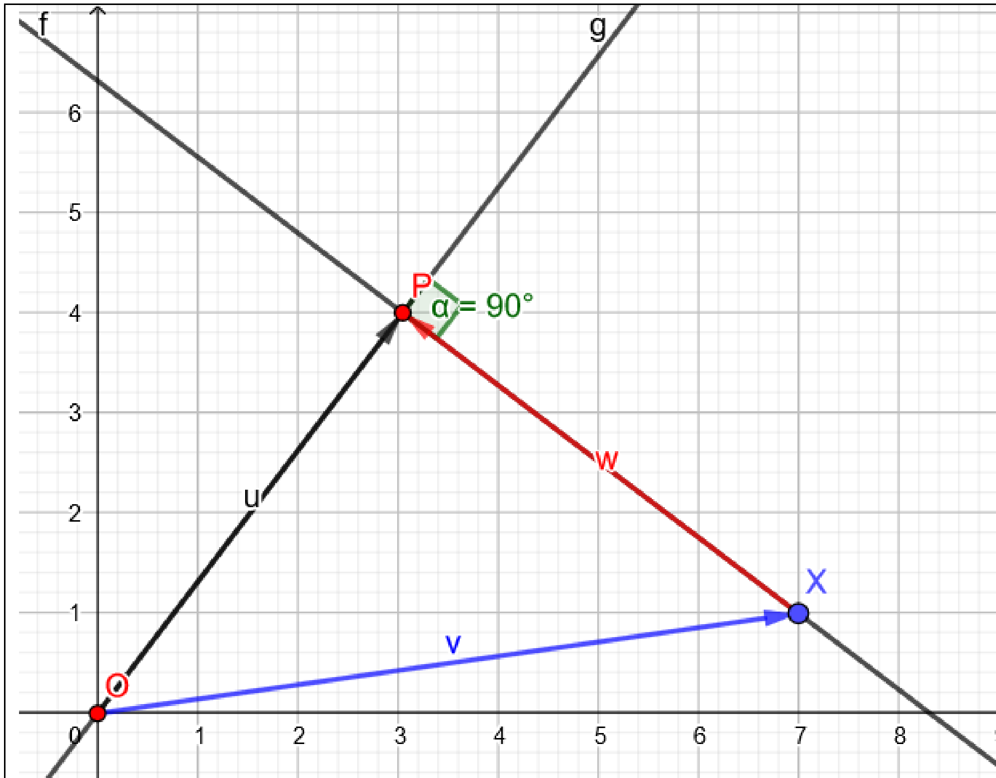
(d) Man führe die entsprechenden Berechnungen durch für die 3 Geraden $y = 2$, $y = x$ und $y = 4–x$ durch den Punkt (2; 2).

**Aufgabe U17**

Schritt #1: Lösung

(a)

**Teilaufgabe #1**: Koordinaten des nächstliegenden Geradenpunktes berechnen




***Gegeben sind***:

- Richtungsvektor $\vec{r}$ der Gerade $XP$
- Ein Punkt $X$ auf der Geraden

[**ohne die beiden** Angaben lässt sich die Gerade **nicht eindeutig** identifizieren]

$$\overrightarrow{XP} = \left\|\overrightarrow{XP}\right\| \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\,\|}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XP}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{XP} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XP}\right) \cdot \overrightarrow{XP} = 0$$

$$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{XP} + \left\|\overrightarrow{XP}\right\|^2 = 0$$

$$\overrightarrow{OX} \cdot \left\|\overrightarrow{XP}\right\| \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\,\|} + \left\|\overrightarrow{XP}\right\|^2 = 0$$

$$\overrightarrow{OX} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\,\|} + \left\|\overrightarrow{XP}\right\| = 0$$

$$\left\|\overrightarrow{XP}\right\| = -\frac{\overrightarrow{OX} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\,\|}$$

Also:

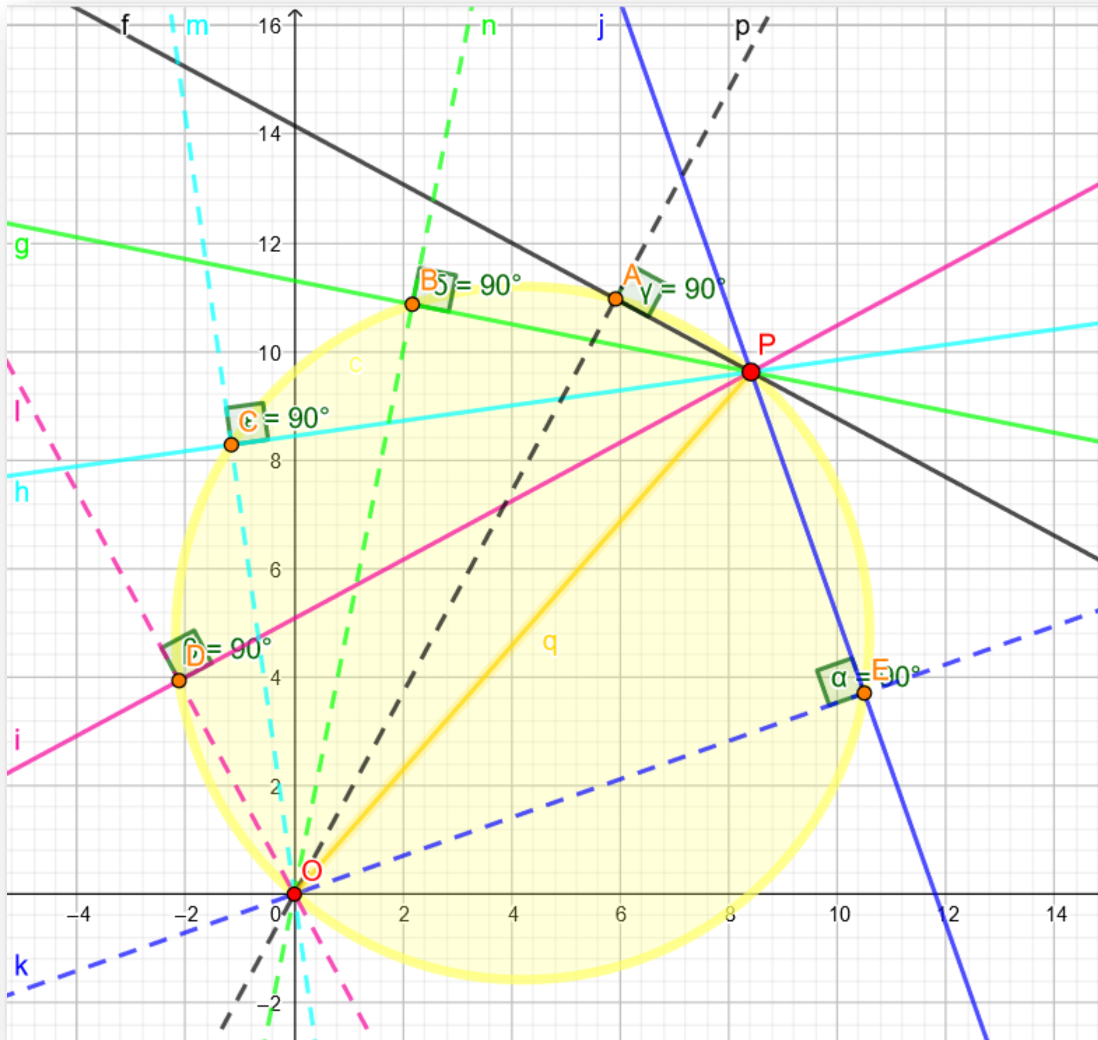
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XP} = \overrightarrow{OX} - \frac{\overrightarrow{OX} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\,\|} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\,\|} = \boxed{\overrightarrow{OX} - \frac{\left(\overrightarrow{OX} \cdot \vec{r}\right)}{\|\vec{r}\,\|^2} \cdot \vec{r}}$$

**Aufgabe U17**

Und übrigens: **jedes Dreieck** kann in einen Kreis einbeschrieben werden – anders formuliert, jede Dreiergruppe von Punkten beschreibt (und zwar eindeutig) einen Kreis

(b)

**Teilschritt #1**: Satz des Thales [eher ein **invertierter Satz des Thales:** Hypotenuse eines in einen Kreis einbeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks ist dessen Durchmesser]



**Aufgabe U17**

(c)

**Teilschritt #1**: Gleichung eines **Kreises** mit dem Radius $\boldsymbol{r}$, zentriert an der Stelle $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

**Teilschritt #2**: zusätzlich für Kreise, die durch den Ursprung gehen

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 = r^2$$

**Teilschritt #3**: obige Teilschritte zusammen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + x_0{}^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_0 + y_0{}^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_0 + x_0{}^2 + y_0{}^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_0}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_0}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 - 2 \cdot y \cdot y_0}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2 \cdot x \cdot x_0}{x^2 + y^2} - \frac{2 \cdot y \cdot y_0}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{1 - 2 \cdot x_0 \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - 2 \cdot y_0 \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = 0}$$

**Teilschritt #4**: Transformation $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{Kreise\ durch\ den\ Ursprung} \longrightarrow \boldsymbol{Geraden}$

$$\boldsymbol{f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)}$$

Ist definiert für jeden Punkt außer dem Ursprung

**Teilschritt #5**: Umkehrtransformation $\boldsymbol{f^{-1}}$: $\boldsymbol{Geraden} \longrightarrow \boldsymbol{Kreise\ durch\ den\ Ursprung}$

$$\boldsymbol{f(f(x, y)) = f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \left(\frac{\frac{x}{x^2 + y^2}}{\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2}, \frac{\frac{y}{x^2 + y^2}}{\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2}\right) = \left(\frac{\frac{x}{x^2 + y^2}}{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}}, \frac{\frac{y}{x^2 + y^2}}{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}}\right) = (x, y)}$$

Das heißt: $\boldsymbol{f^{-1} = f}$

**War zu erwarten:** $f$ stellt ja die **Spiegelung** an einem **Kreis** (hier: **Einheitskreis**) dar und Spiegelungen sind involutiv

**Aufgabe U17**

**Teilschritt #6**: Etappen der Fluchtpunkterkennung mithilfe linearer Regression

| # | Textuelle Beschreibung | Pseudo-OpenCV [der Vorgang wird stark vereinfacht dargestellt] |
|---|---|---|
| 0 | Ein **Zielbild** wird **geladen** | `input = imread(filename)` |
| 1 | **Canny-Algorithmus** wird zwecks ***Kantenerkennung*** eingesetzt | `Canny(input, output)` |
| 2 | **Geradenerkennung** durch **Hough-Transformation** wird durchgeführt | `HoughLines(output, lines)` |
| 3 | ***Kreisspiegelung*** durch $\boldsymbol{f(x,y)}$ -Transformation wird ausgeführt | `CircleReflection(lines, output)` |
| 4 | ***Lineare Regression*** wird für die **transformierten Punkte** durchgelaufen | `fitLine(output,line)` |
| 5 | ***Inverse der Kreisspiegelung*** $\boldsymbol{f^{-1}(x,y)} = f(x,y)$ auf die **Gerade** angewendet | `CircleReflection(line, circle)` |
| 6 | die **Antipode** zum **Ursprung** wird berechnet – liefert den **Fluchtpunkt** | `Antipodal(circle, origin)` |

(d)

**Hausaufgabe ☺**

Aufgabe U18: *Kanten in Multimerkmalsbildern*

Aufgabenstellung

Ein Bild sei nicht durch eine skalare Grauwertfunktion gegeben, sondern durch eine vektorwertige Funktion

$$\vec{m}(x,y) = \begin{pmatrix} m_1(x,y) \\ m_2(x,y) \\ \vdots \\ m_M(x,y) \end{pmatrix}$$

(z.B. Multispektralbild). Es sei hier der Fall zweier kontinuierlicher Variablen $x$, $y$ angenommen. Man bestimme zu einem gegebenen Punkt $(x_0, y_0)$ diejenige Richtung α (Winkel zur $x$-Achse), in der sich $\vec{m}$ am stärksten ändert (als Maß der Änderung soll der Betrag der Richtungsableitung dienen):

(a) allgemein,

(b) für $\vec{m}(x,y) = (2xy;1;1)^T$, $(x_0; y_0) = (1; 2)$.

**Aufgabe U18**

Schritt #1: Lösung

(a)

**Teilschritt #1**: Richtungsableitung im Fokus - Definition

Partielle Ableitungen sind einfach ein Sonderfall:

- $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x} \rightsquigarrow (v_x, v_y) = (1,0)$
- $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial y} \rightsquigarrow (v_x, v_y) = (0,1)$

Sei $\vec{x} = (x, y)$ ein reellwertiger Vektor, $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – ein beliebiger Richtungsvektor:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{v}} = \nabla_{\vec{v}} f(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot v_x, y + h \cdot v_y) - f(x, y)}{h}$$

**Teilschritt #2**: Richtungsableitung basiert auf Gradienten

$$\nabla_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}^T = \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) \cdot (v_x, v_y)^T = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot v_y$$

**Teilschritt #3**: bei einem Einheitsvektor $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$

$$\frac{\partial \vec{m}(x,y)}{\partial \vec{n}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1(x,y)}{\partial \vec{n}} \\ \frac{\partial m_2(x,y)}{\partial \vec{n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial m_M(x,y)}{\partial \vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla m_1(x,y) \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \\ \nabla m_2(x,y) \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \nabla m_M(x,y) \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial m_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial m_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial m_2(x,y)}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial m_M(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial m_M(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ m_{2x} & m_{2y} \\ \vdots & \vdots \\ m_{Mx} & m_{My} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = J_{\vec{m}} \cdot \vec{n}$$

**Teilschritt #4**: Betrag der Richtungsableitung (eigentlich, **Betragsquadrat**)

Durchs **Skalarprodukt** induzierte **Norm**

$$\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^2 = \boxed{\| J_{\vec{m}} \cdot \vec{n} \|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle J_{\vec{m}} \cdot \vec{n}, J_{\vec{m}} \cdot \vec{n} \rangle} = (J_{\vec{m}} \cdot \vec{n})^T \cdot (J_{\vec{m}} \cdot \vec{n}) = \vec{n}^T \cdot J_{\vec{m}}^T \cdot J_{\vec{m}} \cdot \vec{n} = \vec{n}^T \cdot S \cdot \vec{n}$$

**Teilschritt #5**: Wie schaut die Matrix $J_{\vec{m}}^{\boldsymbol{T}} \cdot J_{\vec{m}}$ komponentenweise aus?

$$S := J_{\vec{m}}^{\boldsymbol{T}} \cdot J_{\vec{m}} = \begin{bmatrix} m_{1x} & m_{2x} & \cdots & m_{Mx} \\ m_{1y} & m_{2y} & \cdots & m_{My} \end{bmatrix}_{2\,\mathrm{x}\,M} \cdot \begin{bmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ m_{2x} & m_{2y} \\ \vdots & \vdots \\ m_{Mx} & m_{My} \end{bmatrix}_{M\,\mathrm{x}\,2} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M} m_{ix}{}^2 & \sum m_{ix} \cdot m_{iy} \\ \sum m_{iy} \cdot m_{ix} & \sum_{i=1}^{M} m_{iy}{}^2 \end{bmatrix}_{2\,\mathrm{x}\,2} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

**Teilschritt #6**: unsere Optimierungsaufgabe (hier: **Max**imierungsproblem)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) := \left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial \vec{n}} \right\|^{\boldsymbol{2}} = \vec{n}^{\boldsymbol{T}} \cdot S \cdot \vec{n} = [\cos \boldsymbol{\alpha} \quad \sin \boldsymbol{\alpha}] \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \boldsymbol{\alpha} \\ \sin \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{Max}$$

**Teilschritt #6**: **R**ayleigh-Quotient

$$\boxed{\|\vec{n}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{n}^{\boldsymbol{T}} \cdot \vec{n}} = 1 \implies \vec{n}^{\boldsymbol{T}} \cdot \vec{n} = 1}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \vec{n}^{\boldsymbol{T}} \cdot S \cdot \vec{n} = \frac{\vec{n}^{\boldsymbol{T}} \cdot S \cdot \vec{n}}{\vec{n}^{\boldsymbol{T}} \cdot \vec{n}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{S}, \vec{\boldsymbol{n}})$$

**Teilschritt #7**: Lösung der Optimierungsaufgabe

Rayleigh-Quotient hat eine ganz einfach zu beweisende Eigenschaft:

> seine Extrema findet man an Eigenwerten von $\boldsymbol{S}$ und entsprechende Extremwerte sind Eigenwerte von $\boldsymbol{S}$

---

(b)

Eignet sich als eine einfache **Hausaufgabe**:

- Setzt die Komponenten des vorgegebenen $\vec{\boldsymbol{m}}$ Vektors ein
- Rechnet alle Komponenten der Jakobi-Matrix $\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{m}}}$ aus
- Berechnet die Matrix $\boldsymbol{S}$ an der Stelle $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (1,2)$ – ihr bekommt eine symmetrische Matrix $\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$
- Berechnet deren Eigenwerte
- Größter davon $\lambda_{max} = 20$ stellt den maximalen Wert der $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})$ dar
- Entsprechender Eigenvektor $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (2,1)$ gibt dann die Größe des Winkels: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{tan}^{-1} \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = \mathbf{tan}^{-1} \frac{1}{2}$

---