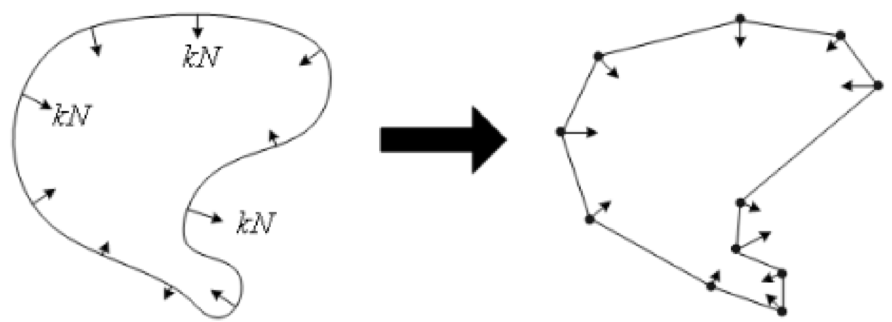
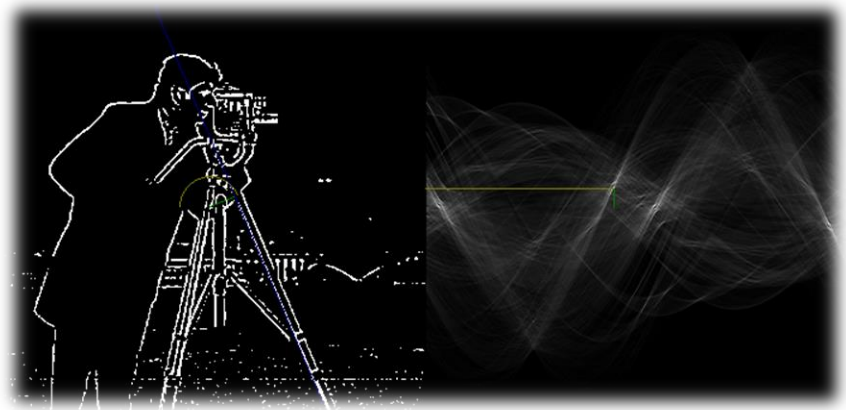
Aufgabenstellungen: *auch unten auf den Folien, vor jeweiligen Lösungen*	*Übungen_06*	*http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia20_ub08.pdf*
	Übungsblatt_04	*http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia20_ue04.pdf*

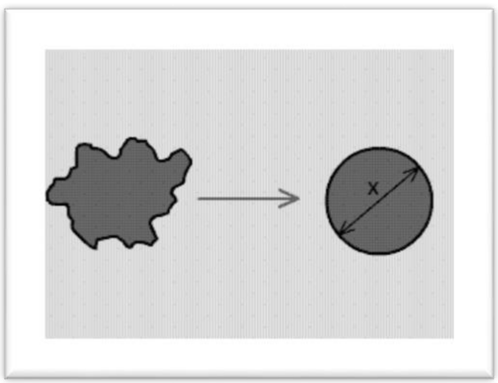
Die Themenpalette in der heutigen Sitzung:

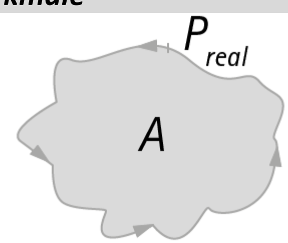
Konturkrümmung	***Hough-Transformation*** *#born2Balegend ☺*





formbeschreibende Merkmale





$$S = \frac{P_{EQPC}}{P_{real}} = \frac{2\sqrt{\pi \cdot A}}{P_{real}}$$

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe U16: *Konturkrümmung*

Aufgabenstellung

Aufgabe U16 (Konturkrümmung)

Die Krümmung einer Kontur an einem Punkt p_i wird aus der Folge (p_{i-n}, ..., p_i, ..., p_{i+n}) von $2n+1$ aufeinanderfolgenden Konturpunkten berechnet.

Es sind verschiedene Krümmungsmaße für diskrete Kurven in Gebrauch:

(1) $180° - \gamma_i$, wobei γ_i der durch die drei Punkte p_{i-n}, p_i, p_{i+n} gegebene Winkel bei p_i ist.

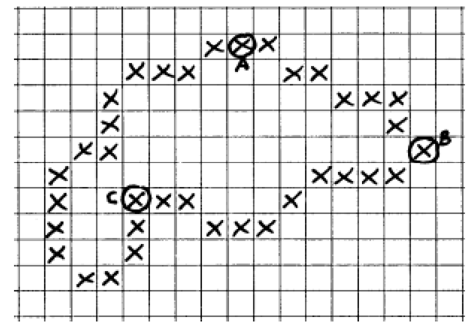
(2) Die vorzeichenbehaftete Fläche des von diesen drei Punkten aufgespannten Dreiecks (positiv für konvexe und negativ für konkave Krümmung).

(3) Die Summe gewichteter Differenzen d_i zwischen aufeinanderfolgenden Richtungsindices r_i nach dem Kettencode:
r_i = Kettencode der Richtung von p_i nach p_{i+1},
$d_i = (r_i - r_{i-1} + 12 \mod 8) - 4$,

$KR_i = \sum_{j=-n}^{n} w_j d_{i+j}$ mit Gewichten $w_j \geq 0$, die sich zu 1 summieren.

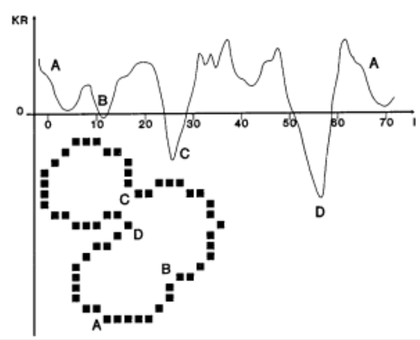
(a) Man bestimme die Formeln zu den Krümmungsmaßen (1) und (2).

(b) Man teste die drei Krümmungsmaße an den Punkten A, B und C folgender Kontur und diskutiere ihre Vor- und Nachteile:



(für (1) und (2) wähle man jeweils $n = 2$, für (3) $n = 1$ und $w_{-1} = \frac{1}{4}$, $w_0 = \frac{1}{2}$, $w_1 = \frac{1}{4}$.)

Beachte: Die numerischen Werte der Krümmung an einzelnen Stellen sind weniger bedeutsam; interessant sind die Extrema im Verlauf der Krümmung entlang der Kontur. Maxima: potenzielle Ecken bei eckigen konvexen Objekten; Minima: potenziell Stellen, wo 2 sich überlappende konvexe Objekte zu trennen sind, bzw. Kandidatenpunkte für Schnitte durch das Objekt. Beispiel:



Aufgabe U16

Schritt #1: Lösung

(a)

Teilaufgabe #1: laut dem Kosinussatz

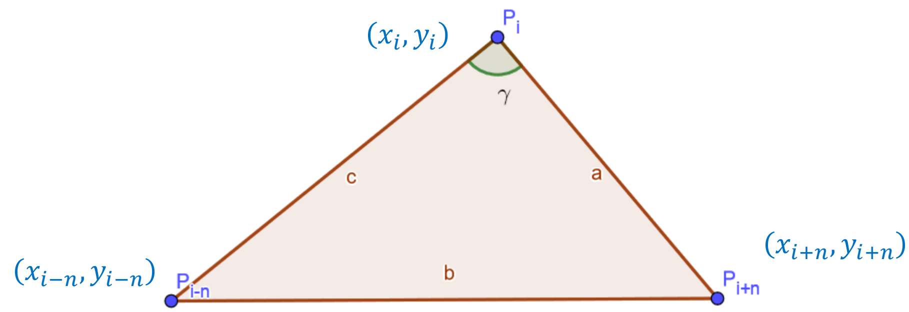
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos \gamma$$

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot c \cdot a}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k} = \mathbf{180^\circ} - \boldsymbol{\gamma} = 180^\circ - \cos^{-1} \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot c \cdot a}}$$

Wobei:

$$c^2 = (x_i - x_{i-n})^2 + (y_i - y_{i-n})^2$$
$$a^2 = (x_{i+n} - x_i)^2 + (y_{i+n} - y_i)^2$$
$$b^2 = (x_{i+n} - x_{i-n})^2 + (y_{i+n} - y_{i-n})^2$$



Teilaufgabe #2: Orientierung eines Vielecks

diskrete Nachbildung einer kontinuierlichen geschlossenen Kurve [wir betrachten Polygone <u>ohne</u> Überschneidungen]

Ein Viel-Eck $P_0 P_1 \cdots P_{Viel}$ ☺ (aka Polygon) kann nur in zwei Richtungen traversiert (aka gebildet aka durchgelaufen) werden:

- ↺ - im Uhrzeigersinn (aka **links**läufig) oder (exklusives Oder ☺)
- ↻ - im <u>Gegen</u>uhrzeigersinn (aka **rechts**läufig)

Konventionell wird ↺ als positive Richtung angenommen – so bleibt ↻ im Minus ☺

Fläche des Dreiecks $\boldsymbol{P_{i-n} P_i P_{i+n}}$ wird folgendermaßen berechnet:

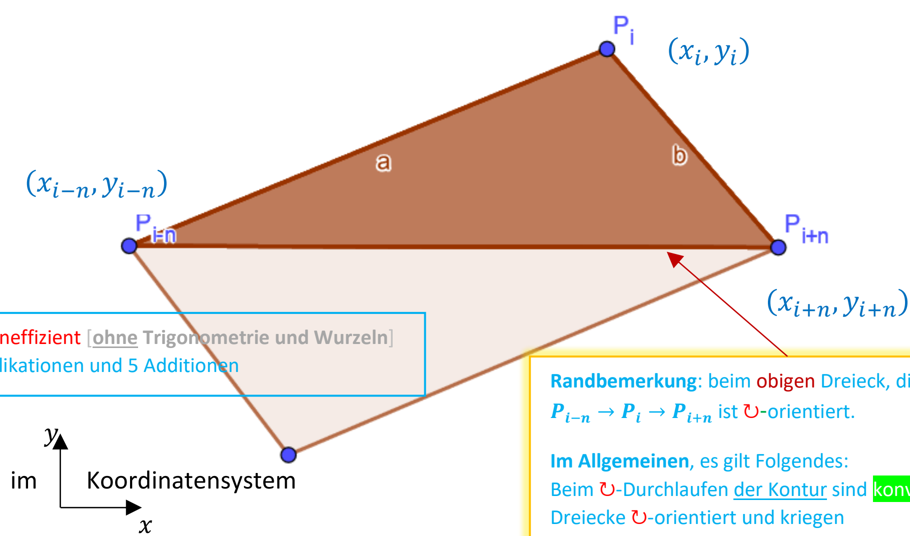
$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{P_{i-n} P_i P_{i+n}}} = \frac{1}{2} \cdot det \begin{bmatrix} x_{i-n} & y_{i-n} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i+n} & y_{i+n} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot det \begin{bmatrix} x_i - x_{i-n} & x_{i+n} - x_{i-n} \\ y_i - y_{i-n} & y_{i+n} - y_{i-n} \end{bmatrix} =$$

äußerst recheneffizient [<u>ohne</u> Trigonometrie und Wurzeln]
- nur 2 Multiplikationen und 5 Additionen

$$\boxed{\frac{(x_i - x_{i-n}) \cdot (y_{i+n} - y_{i-n}) - (x_{i+n} - x_{i-n}) \cdot (y_i - y_{i-n})}{2}}$$

positiv bei ↺ der Kette $\boldsymbol{P_{i-n} \to P_i \to P_{i+n}}$ - sonst (d.h. bei ↻ der Kette) negativ



Randbemerkung: beim obigen Dreieck, die Kette $\boldsymbol{P_{i-n} \to P_i \to P_{i+n}}$ ist ↻-orientiert.

Im Allgemeinen, es gilt Folgendes:
Beim ↻-Durchlaufen <u>der Kontur</u> sind konvexe Dreiecke ↻-orientiert und kriegen dementsprechend negatives Vorzeichen der Fläche

Aufgabe U16

(b)

Teilschritt #1: paar Schlüsselideen apropos Modulo-Funktion $\boldsymbol{a \bmod m}$ (a, m – ganze Zahlen)

Intuitive Definition	$\boldsymbol{a \bmod m}$ berechnet die vorzeichenbehaftete Ungenauigkeit beim Versuch der Zahl a durch Vielfache von m **am nächsten zu kommen:**

[C++, Java]	$8 \bmod (-3) = -2 \cdot (-3) + 2$	$(-8) \bmod 3 = -2 \cdot 3 - 2$	$8 \bmod 3 = 2 \cdot 3 + 2$	$(-8) \bmod (-3) = 2 \cdot (-3) - 2$
[Python]	$8 \bmod (-3) = -3 \cdot (-3) - 1$	$(-8) \bmod 3 = -3 \cdot 3 + 1$	$8 \bmod 3 = 2 \cdot 3 + 2$	$(-8) \bmod (-3) = 2 \cdot (-3) - 2$

Formale Beschreibung:	berechnet den Rest der Division		
Formale Definitionen	mathematische Version #1	$\boldsymbol{a \bmod m + (-a) \bmod m = m}$ $\boldsymbol{a \bmod m = (a-m) \bmod m}$	$0 \le \boldsymbol{Rest} < \lvert m \rvert$, wobei $\boldsymbol{a} = Vielfaches\ von\ \boldsymbol{m} + \boldsymbol{Rest}$
	mathematische Version #2	$\boldsymbol{Rest}$ = beste (d.h. vom kleinsten Betrag) Annäherung unter beiden (d.h. **links** oder **rechts** von $\boldsymbol{a}$) Richtungen	
	„mathematische" Version [Python]	$\boldsymbol{sgn(a \bmod m) = sgn(m)}$	$mod: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}\,;\ (a,m) \mapsto a \bmod m \overset{\text{def}}{=} a - \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor \cdot m$
	symmetrische Version [C, Java]	$\boldsymbol{sgn(a \bmod m) = sgn(a)}$	$mod: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}\,;\ (a,m) \mapsto a \bmod m \overset{\text{def}}{=} a - \left(sgn(a) \cdot sgn(m) \cdot \left\lfloor \frac{\lvert a \rvert}{\lvert m \rvert} \right\rfloor\right) \cdot m$

Hausaufgabe: stimmt's?

$\boldsymbol{8}$

bei Spitzen/Haaren ☺, die 1 Pixel breit sind: $\overrightarrow{r_i} = -\overrightarrow{r_{i-1}}$ $\boldsymbol{r_i = r_{i-1}}$

Teilschritt #2: was sagen uns gewichtete Differenzen?

$$d_i = (r_i - r_{i-1} + 4 \bmod \mathbf{8}) - 4 \Longrightarrow 0 - 4 \le d_i \le 7 - 4 \Leftrightarrow -4 \le d_i \le 3 \Leftrightarrow d_i \in \{-4, \boxed{-3,-2,-1}, 0, \boxed{1,2,3}\}$$

$\boldsymbol{r_i - r_{i-1}} \in \{\boldsymbol{-3, -2, -1, 5, 6, 7}\}$

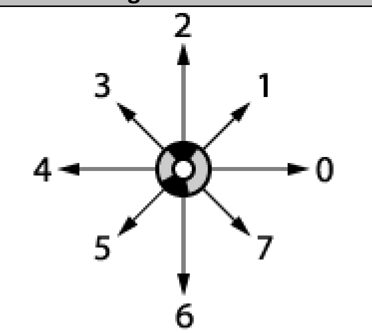
$r_i - r_{i-1} \in \{-7, -6, -5, 1, 2, 3\}$

Beispiel: $(r_{i-1}, r_i) = (0{,}5)$ entspricht einem konkaven Teil beim ↺-Durchlaufen der Kontur

$\boldsymbol{r_i - r_{i-1}}$

i-1\ i	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	-1	0	1	2	3	4	5	6
2	-2	-1	0	1	2	3	4	5
3	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
4	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
5	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
6	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
7	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

Navigationsschema



$$(r_i - r_{i-1} + 4 \bmod \mathbf{8}) - 4 = d_i = \begin{cases} r_i - r_{i-1}, & falls\ \lvert r_i - r_{i-1} \rvert \le 4 \\ r_i - r_{i-1} - \mathbf{8}, & falls\ r_i - r_{i-1} > 4 \\ r_i - r_{i-1} + \mathbf{8}, & falls\ r_i - r_{i-1} < -4 \end{cases}$$

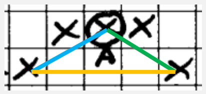
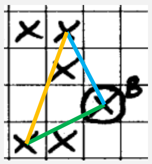
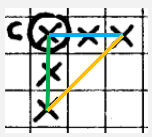
Beim ↺-Durchlaufen der Kontur:

- Einbuchtungen (d.h. konkave Teile) kriegen nen negativen Krümmungswert
- Ausbuchtungen (d.h. konvexe Teile) – nen positiven Krümmungwert

Beim ↻-Durchlaufen der Kontur - umgekehrt

Teilschritt #3: Lösung

weist auf den ↻-Durchlauf der Kontur hin

Punkte	***Kosinussatz**-basiert*	***Gaußsche Flächenformel**-basiert*	***Kettencode**-basiert*
	$c^2 = 1_{Zeile}{}^2 + 2_{Spalten}{}^2 = 5$ $a^2 = 1_{Zeile}{}^2 + 2_{Spalten}{}^2 = 5$ $b^2 = 0_{Zeilen}{}^2 + 4_{Spalten}{}^2 = 16$ $\boldsymbol{k_A} = 180^\circ - \cos^{-1}\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot c \cdot a} \approx 53^\circ$	$\boldsymbol{k_A} = \frac{1}{2} \cdot det \begin{bmatrix} x_{A-2} & y_{A-2} & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_{A+2} & y_{A+2} & 1 \end{bmatrix} =$ $\frac{1}{2} \cdot det \begin{bmatrix} x_A - x_{A-2} & x_{A+2} - x_{A-2} \\ y_A - y_{A-2} & y_{A+2} - y_{A-2} \end{bmatrix} =$ $\frac{1}{2} \cdot det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2$	$d_{A-1} = (0 - 1 + 4)\ mod\ 8 - 4 = -1$ $d_A = (0 - 0 + 4)\ mod\ 8 - 4 = 0$ $d_{A+1} = (7 - 0 + 4)\ mod\ 8 - 4 = -1$ $\boldsymbol{k_A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot (-1) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot 0 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$
	... rechnet selber aus (erfolgt bspw. auf gleiche Weise wie oben) $\boldsymbol{k_B} = 90^\circ$	... rechnet selber aus (erfolgt bspw. auf gleiche Weise wie oben) $\boldsymbol{k_B} = -\frac{5}{2}$	... rechnet selber aus (erfolgt bspw. auf gleiche Weise wie oben) $\boldsymbol{k_B} = -1$
	... rechnet selber aus (erfolgt bspw. auf gleiche Weise wie oben) $\boldsymbol{k_C} = 90^\circ$	... rechnet selber aus (erfolgt bspw. auf gleiche Weise wie oben) $\boldsymbol{k_C} = 2$	... rechnet selber aus (erfolgt bspw. auf gleiche Weise wie oben) $\boldsymbol{k_C} = 1$

Leistungsprofil von Ansätzen (d.h. von **Krümmungsmaßen**):

- ***Winkelgröße**-basiert: Krümmungsstärke [aka **Betrag**] - 👍, konvex/konkav [aka **Vorzeichen**] - 👎*
- ***Flächen**-basiert: Krümmungsstärke [aka **Betrag**] - 👎, konvex/konkav [aka **Vorzeichen**] - 👍*
- ***Kettencode**-basiert: Krümmungsstärke [aka **Betrag**] - 👍, konvex/konkav [aka **Vorzeichen**] - 👍*

Aufgabe 1: *Hough-Transformation*

Aufgabenstellung

Gegeben sind die Punkte $A = (4; 3)$, $B = (6; 0)$, $C = (7; -1)$, $D = (0; -1)$.

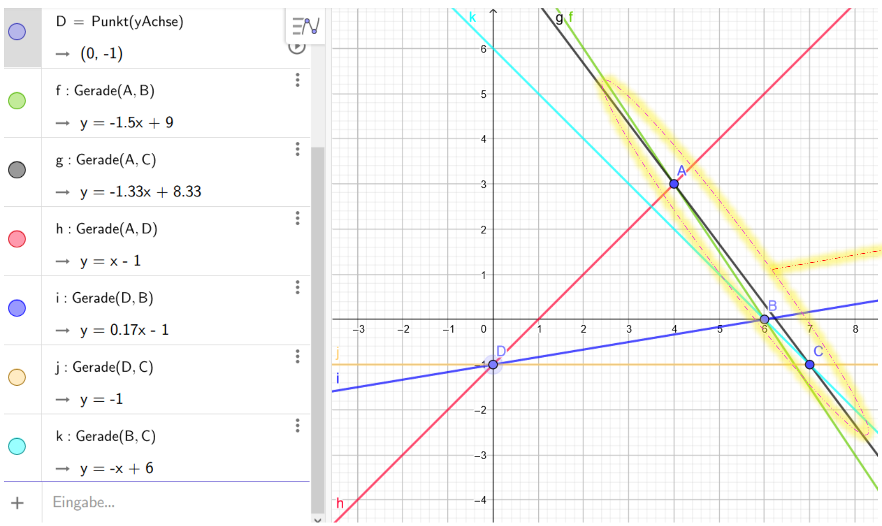
(a) Führen Sie für die 6 Verbindungsgeraden dieser Punkte die Hough-Transformation durch (Parameterraum (r, θ), wobei $x \cos\theta + y \sin\theta = r \geq 0$ die Hessesche Normalform der entsprechenden Geraden ist) und zeichnen Sie die Geraden als Punkte in ein (r, θ)-Diagramm ein.

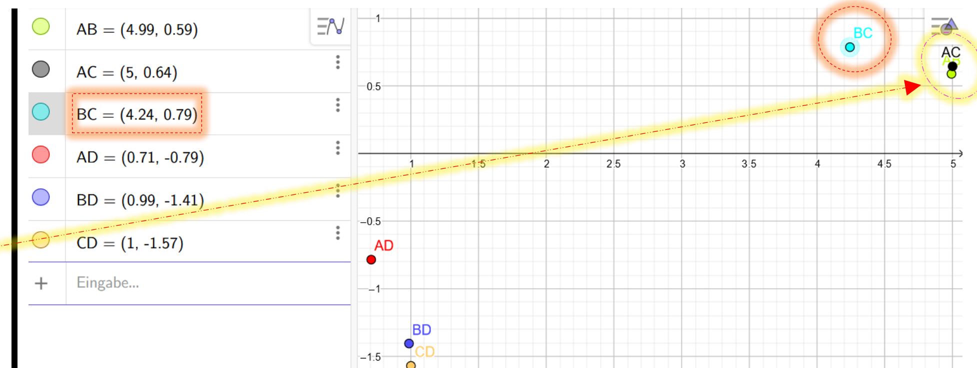
(b) Wie drückt sich die "Fast-Kollinearität" der Punkte A, B, C im (r, θ)-Diagramm aus?

Schritt #1: Lösung

(a) + (b)

Teilschritt #1: Ortsraum (x, y) und Parameterraum (r, θ) [hier: aka **Hough-Raum**]





Hausaufgabe: überlegt euch, warum

Randbemerkung: $\overrightarrow{n_{\|\cdot\|=1}} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{n_{\|\cdot\|=1}} \cdot \overrightarrow{OB}$

Berechnungen am Beispiel von der **Gerade BC**:

Richtungsvektor:	$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = C - B = (7, -1) - (6, 0) = (1, -1)$			**Abstand vom O-Punkt:**	$r = \overrightarrow{n_{\|\cdot\|=1}} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \cdot (1 \cdot 6 + 1 \cdot 0) \approx 4.24$
Normalenvektor:	$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1)$	**normiert:**	$\overrightarrow{n_{\|\cdot\|=1}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \cdot \vec{n}$	**Winkel θ:**	$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \approx 0.79$

Aufgabe 2: *Merkmalextraktion*

Aufgabenstellung

Bestimmen Sie zu den folgenden beiden Binärbild-Objekten die folgenden Merkmale: Fläche (in Pixeln), Umfang (exakte Länge, Pixel-Seitenlänge = 1), Schwerpunkt, Formfaktor, Exzentrizität, *aspect ratio* der *Ferret box*, Füllungsgrad der *Ferret box*, Signatur (Abstand zum gegenüberliegenden Randpunkt für jeden Randpunkt, als Diagramm).

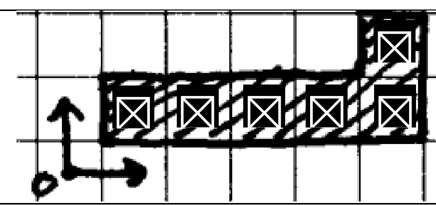
(a) (b)

Schritt #1: Lösung

(a) + (b) ← ist identisch zu (a) – macht's selber als **Hausaufgabe**

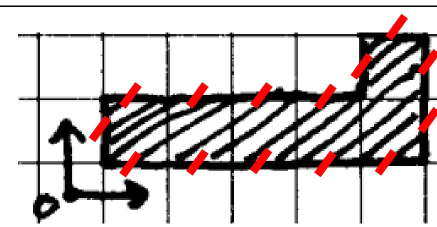
Teilschritt #1: Fläche – Anzahl der Punkte eines Bildobjektes $f^{-1}(\boxtimes)$

$$F_{(a)} = \left|f_{(a)}^{-1}(\boxtimes)\right| = \sum_{(x,y)\,\in\, f_{(a)}^{-1}(\boxtimes)} \mathbf{1} = \mathbf{6}$$



Teilschritt #2: Umfang

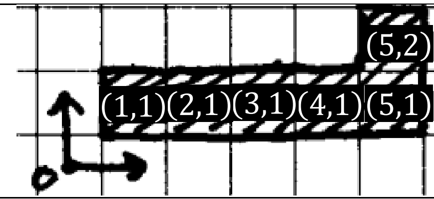
• Anzahl der (i.d.R. **äußeren**, aber auch inneren) Konturpunkte eines Bildobjektes $f^{-1}(\boxtimes)$
$U_{(a)} = \left|\left\{(x,y) \in f_{(a)}^{-1}(\boxtimes) \;:\; \exists (x',y') \in f^{-1}(\square) : \lvert x-x'\rvert + \lvert y-y'\rvert = 1\right\}\right| = 6$
• Länge des Konturkettencodes eines Bildobjektes (entsprechend dem Nachbarschaftstyp)
$U_{(a)} = 1 \cdot \lvert \boldsymbol{nichtdiagonale} \rvert + \sqrt{2} \cdot \lvert \boldsymbol{diagonale} \rvert$
• **Gesamtlänge** aller mit dem Hintergrund geteilten **Pixelkanten der Kontur**
$U_{(a)} = \lvert / \rvert = 14$



Aufgabe 2:

Teilschritt #3: geometrischer Schwerpunkt – Position des ***Mittleren Pixels*** (aka **Mittelwert** von Bildpunkt**positionen**)

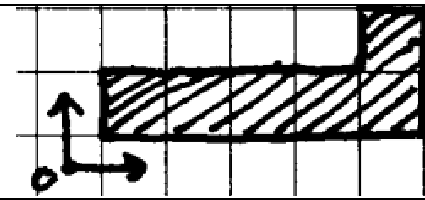
$$S_{(a)} = \frac{1}{F_{(a)}} \cdot \sum_{(x,y) \in f_{(a)}^{-1}(\boxtimes)} (x,y) = \frac{1}{6} \cdot [(1,1) + \cdots + (5,2)] = \frac{1}{6} \cdot (20,7) = \left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{6}\right)$$



Hausaufgabe: warum quadriert?

Teilschritt #4: Formfaktor [hier: aka **Rundheit**] – für Kreise normiertes Verhältnis der Fläche zum Quadrat des Umfangs

$$R_{(a)} = 4\pi \cdot \frac{F_{(a)}}{\left(U_{(a)}\right)^2} = 4\pi \cdot \frac{6}{14^2} \approx 40\%$$



Teilschritt #5: Exzentrizität

Theoretischer Ansatz:
Verhältnis von der **längsten Sehne** innerhalb des Bildobjektes zur **längsten Sehne quer** dazu (lässt sich planimetrisch auffinden und ausrechnen)

Praktischer Ansatz:

$$E_{(a)} = \frac{(m_{20} - m_{02})^2 + 4 \cdot (m_{11})^2}{(m_{20} + m_{02})^2} = \cdots \textit{berechnet selber}$$

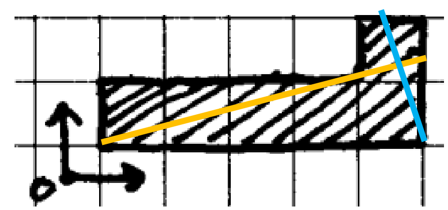
Wobei:

$$m_{pq} = \sum_{(x,y) \in f_{(a)}^{-1}(\boxtimes)} Intensität(x,y) \cdot \left(x - {}_xS_{(a)}\right)^p \cdot \left(y - {}_yS_{(a)}\right)^q$$

$0 \leq E_{(a)} \leq 1$: je **kreisförmiger**, umso näher zu 0 – je **länglicher**, umso näher zu 1

Algorithmische Ansätze (angesichts aktuelles Forschungsstandes gibt's mindestens **2 davon**):

- Auffinden vom größten Abstand zwischen je 2 Pixeln der Kontur (wir nehmen natürlich an, dass man die Konturpunkte als ne Liste von deren Koordinaten bereits gewonnen hat – dazu gibt's zahlreiche Ansätze **[bspw. durch Morphologie oder Faltung]** und Algorithmen zur Sortierung dieser Liste [zB. **Moorscher Konturverfolgungsalgorithmus**]), optionale Drehung des Objektes (damit die längste Sehne senkrecht positioniert wird) und pixelweises ↻/↺-Tracing von Quersehnen aus anderen Konturpunkten
- Bilden von Sehnenmengen je Winkel einer diskreten Kreisaufteilung und Auffinden von Maxima je Paar von orthogonalen Mengen (liefert auch extra Information zum Objekt)



Lediglich zur Information für Neugierige ☺: ist nicht prüfungsrelevant

<u>Aufgabe 2</u>

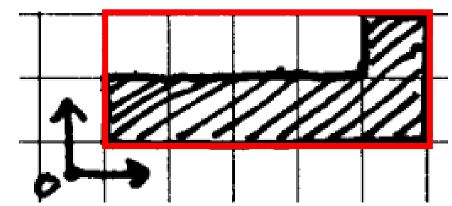
Teilschritt #6: *Ferret*-Box – das kleinste achsenparalleler umschreibender Rechteck aka <u>MinMax</u>-**Box** (lässt sich also auch bei beliebig gedrehten Objekten trivial ausrechnen)

Aspect Ratio: misst das <u>Seitenverhältnis</u> der *Ferret*-Box

$$A_{(a)} = \frac{Breite}{Höhe} = \frac{5}{2}$$

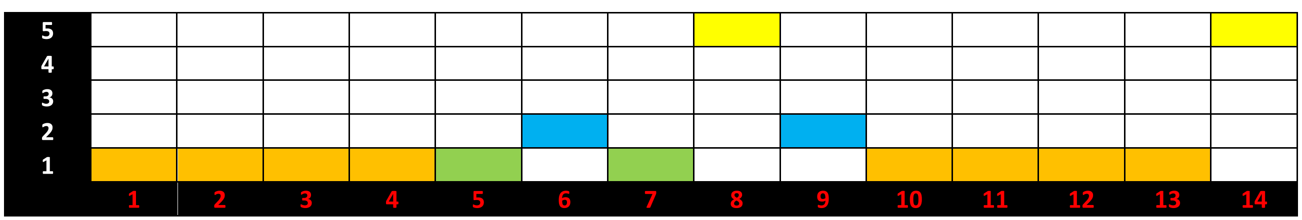
Füllungsgrad: misst wie <u>dicht</u> ist ein Objekt in die Hülle (hier: in der ***Ferret*-Box**) eingeschlossen

$$D_{(a)} = \frac{F_{(a)}}{Breite \cdot Höhe} = \frac{6}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

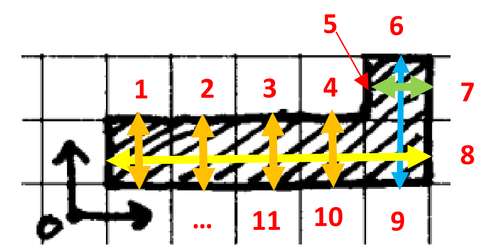


Hausaufgabe: warum beide und nicht einfach gegenüberliegend

Teilschritt #7: Signatur – <u>Abstand</u> zum **nächst- und gegenüber**liegenden Konturpunkt (oder **Konturkante** – beide Ansätze möglich)



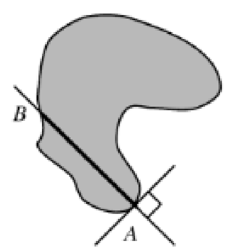
Hier: kantenbasiert



Interessante Randbemerkung zur Signatur: bei unserem Betrachtungsobjekt, man kriegt ein Gefühl, Signatur hätte immer ne <u>symmetrische Gestalt</u> (im folgenden Sinne: zwei gegenüberliegenden Punkte sind im gleichen Abstand zueinander).

I.d.R. (also bei **Konturpunkt**- und **nicht bei Kantenbasierter** Signatur) wird aber die **Gegenrichtung** durch die <u>Tangente</u> zum aktuellen Ausgangspunkt berechnet (basiert auf kontinuierlichem Modell) – und diese Relation „gegenüberliegend" ist dann nicht mehr (intuitiverweise) symmetrisch, weil die Tangente am aktuellen Punkt dessen Nachbarschaft benötigt, die bei intuitiverweise gegenüberliegenden Punkten unterschiedliche Krümmungen haben kann.

Siehe folgendes **Beispiel**:



Punkt B liegt gegenüber dem Punkt A (auf Basis von der Tangente zum Punkt A der Kontur),

das Gegenüber von B ist nicht automatisch A, sondern hängt von der Krümmung am B ab