
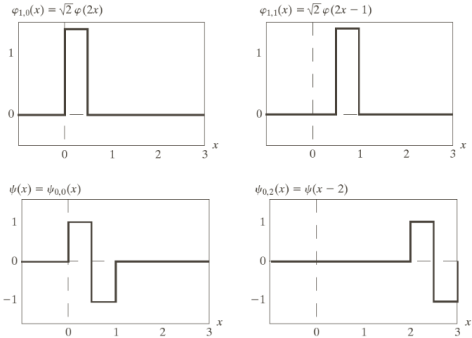


Aufgabenstellungen:	Übungen_04	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia20_ub06.pdf
	Übungsblatt_03	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia20_ue03.pdf

Die Themenpalette in der heutigen Sitzung:

<p>Morphologische Bildverarbeitung [das Bild unten zeigt Skelettierung]</p> 	<p>Haar-Wavelet Transform [die Abbildung unten zeigt basische Funktionen]</p> 
--	--

Inhalt

- Aufgabe 1: 2
 - Schritt #1: wichtigste Grundkenntnisse / Voraussetzungen zum Thema..... 2
 - Schritt #2: direkt zur Lösung 3
- Aufgabe 2: 4
 - Schritt #1: direkt zur Lösung 4
- Aufgabe U11: 5
 - Schritt #1: direkt zur Lösung 5
- Aufgabe U12: 6
 - Schritt #1: direkt zur Lösung 6
- Aufgabe U13: 7
 - Schritt #1: direkt zur Lösung 7

Aufgabe 1:

Schritt #1: wichtigste Grundkenntnisse / Voraussetzungen zum Thema

Steckbrief der **Mathematischen Morphologie** (hilft dabei Unklarheiten / Verwirrungen rechtzeitig zu beseitigen und sichert einen lockeren Einstieg ins Thema)

- Morphologische Operatoren haben ihren **Ursprung** bei binären (aka schwarzweißen aka 01- aka KK [Kreis-Kreuz]) Bildern – „Grauwertmorphologie“ ist eine intuitive Verallgemeinerung
- Morphologische Operatoren sind **nichtlinear** (**Hausaufgabe: überlegt euch, warum**)
- Grundidee** der mathematischen Morphologie ist die **Mengenlehre** einzusetzen – wie kann man ein Bild $f(z, s): D(f) \rightarrow \text{Intensität } \odot$ als eine Menge ansehen (natürlich, intuitiverweise \odot)?

Definitionsbereich der Funktion f

Bild \Rightarrow Abbildung $f(z, s): D(f) \rightarrow I \Rightarrow$ Grafik dieser Abbildung $\mathbb{R}^3 \supset G(f) = \{((z, s), f(z, s)) \equiv (z, s, f(z, s)): (z, s) \in D(f)\} \Rightarrow$ voila! eine Menge \odot

Binäre Bilder: diese kann man ganz locker auch im **2D-Euklidischen** Raum \mathbb{R}^2 als eine Menge darstellen – also, dritte Dimension mitzuschleppen wäre echt ungünstig \odot

je nach Binärbild, \blacksquare / \square kann entweder Hinter- oder Vordergrund sein

Binärbild $f(z, s): D(f) \rightarrow \{0, 1\} \equiv \{\square, \boxtimes\} \equiv \{\text{schwarz, weiß}\} \equiv \{\text{Hintergrund, Vordergrund}\} \Rightarrow f^{-1} \equiv f^{-1}(1) \equiv f^{-1}(\boxtimes) \subset \mathbb{R}^2$

Urbild von \boxtimes unter f

Bausteine der Mengenlehre für Binärbilder:

- Komplement:**

$$(f^{-1})^c \equiv \overline{f^{-1}} \equiv c f^{-1} \equiv c f^{-1}(\boxtimes) = f^{-1}(\square) = \{(z, s): f(z, s) = \square \equiv 0\} = \{(z, s): f(z, s) \neq \boxtimes \equiv 1\} = \{(z, s): (z, s) \notin f^{-1}(\boxtimes)\}$$

- Vereinigung:**

$$f_1^{-1} \cup f_2^{-1} = \{(z, s): (z, s) \in f_1^{-1}(\boxtimes) \vee (z, s) \in f_2^{-1}(\boxtimes)\}$$

- Schnittmenge:**

$$f_1^{-1} \cap f_2^{-1} = \{(z, s): (z, s) \in f_1^{-1}(\boxtimes) \wedge (z, s) \in f_2^{-1}(\boxtimes)\}$$

Intuitiver Weg zu Erosion & Dilatation:

$S^{-1}_{(z,s)}$ steht für „Strukturelement mit seinem Bezugspunkt (d.h. (0, 0)-Punkt im eigenen Koordinatensystem) an der Stelle (z, s) [im Koordinatensystem des Bildes]“

Erosion = Minkowski-Differenz [**Bild $f \ominus$ Strukturelement**]

Dilatation = Minkowski-Summe [**Bild $f \oplus$ Strukturelement**]

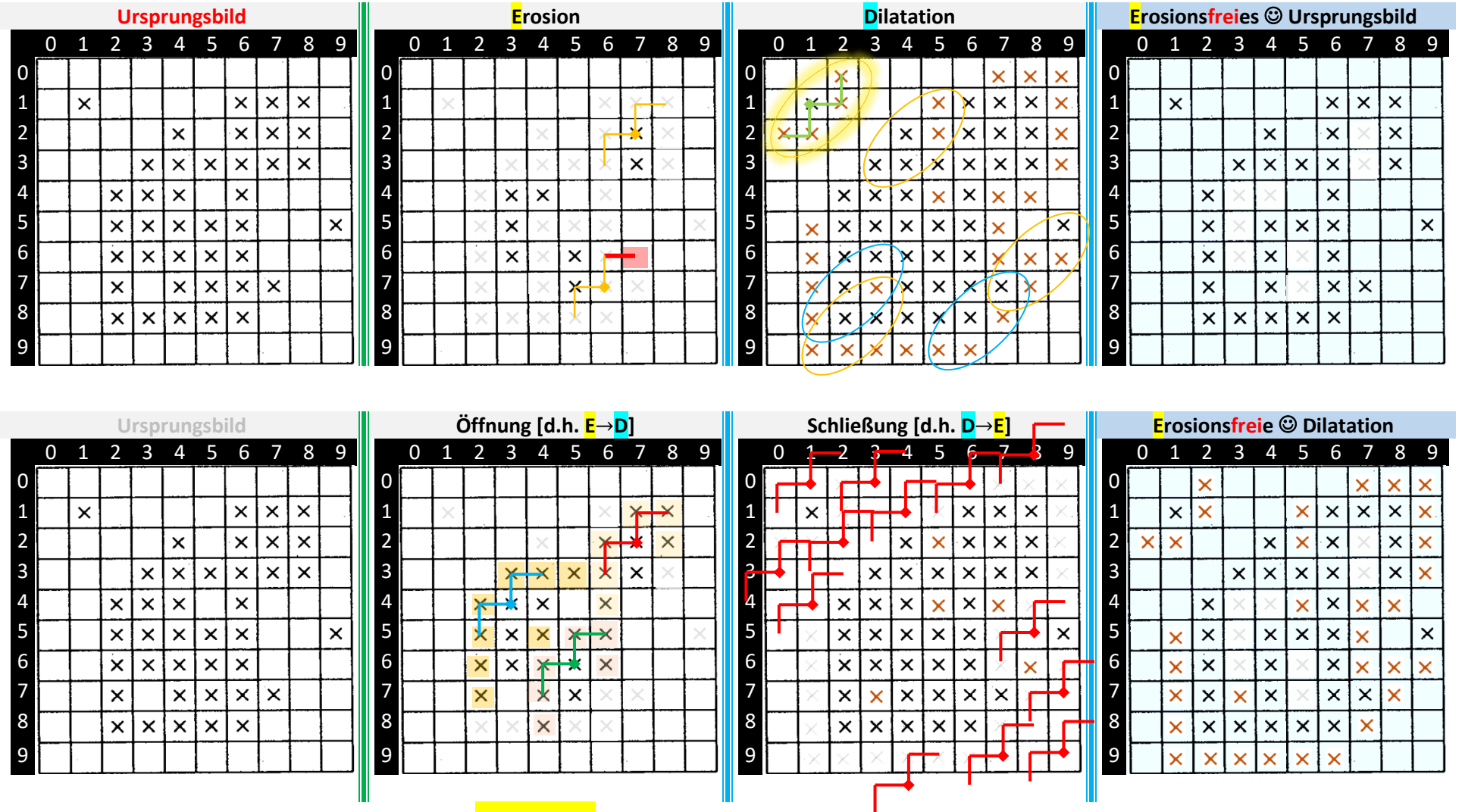
$$f \ominus S = S \text{ passt vollständig ins } f = \{(z, s): S^{-1}_{(z,s)} \subseteq f^{-1}(\boxtimes)\}$$

$$f \oplus S = S \text{ passt nicht vollständig ins } f = \{(z, s): S^{-1}_{(z,s)} \not\subseteq f^{-1}(\square)\}$$

Der folgende Absatz **darf übersprungen werden** – ist **nicht übungsrelevant** und bietet nur einen kurzen Einblick ins Thema „Mathematische Morphologie: Grauwertbilder als Binärbilder“

Grauwertbilder: diese lassen sich entweder als ein Stapel von Binärbildern (je Intensitätswert) oder mithilfe der so genannten „**Umbra**“ [aka **Schatten**] (ist praktisch ein **Untergraph** eines Grauwertbildes $f: U(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z): z \leq f(x, y) \wedge (x, y) \in D(f)\}$) darstellen – dann kann man auch für Grauwertbilder reine Mengenlehre verwenden um all die morphologischen Operatoren zu definieren.

Schritt #2: direkt zur Lösung



Kurze Erläuterung: obige Bilder enthalten **Lösungen** [„X“ und „X“] und Hinweise darauf, wie man diese Lösungen praktisch in einem einzigen Schritt bekommt.

Hausaufgabe: beweist die Gültigkeit der obigen Ansätze zur **effizienteren Umsetzung** von 4 basischen morphologischen Operatoren – **stattdessen** könnt ihr basische Definitionen [siehe beispielsweise [Skript](#)] von diesen Operatoren verwenden, Ergebnisbilder bekommen und mit den obigen Lösungen abgleichen.

Aufgabe 2:

Schritt #1: direkt zur Lösung

Für Grauwertbilder $f(z, s): \{0, 1, \dots, Z-1\} \times \{0, 1, \dots, S-1\} \rightarrow I_M^+ = \{0, 1, \dots, M\}$ (kurz: $f(z, s): Z \times S \rightarrow I_M^+$):

- **Flaches Strukturelement:**

$$B \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- **Komplement:**

$$\overline{f(z, s)} \equiv f^c(z, s) \equiv Cf(z, s) \stackrel{\text{def}}{=} M - f(z, s)$$

- **Erosion:**

$$[f \ominus B](z, s) \equiv E_B(f(z, s)) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{(x, y) \in (z, s) + B \cap Z \times S} f(x, y)$$

- **Dilatation:**

$$[f \oplus B](z, s) \equiv D_B(f(z, s)) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x, y) \in (z, s) + B \cap Z \times S} f(x, y)$$

Satz:

$$\models E_B = CD_B C$$

Beweis:

$$\begin{aligned} CD_B Cf(z, s) &= C[D_B(Cf(z, s))] = C[D_B(M - f(z, s))] = C\left[\max_{(x, y) \in (z, s) + B \cap Z \times S} (M - f(x, y))\right] = \\ &= C\left[M - \min_{(x, y) \in (z, s) + B \cap Z \times S} f(x, y)\right] = C[M - E_B(f(z, s))] = M - (M - E_B(f(z, s))) = E_B(f(z, s)) \end{aligned}$$

Hausaufgabe: checkt jeden Schritt (d.h. die Gültigkeit jedes Überganges) im Beweis.



Aufgabe U11:

Schritt #1: direkt zur Lösung

Für Binärbilder $f(z, s): \{0,1, \dots, Z-1\} \times \{0,1, \dots, S-1\} \rightarrow I_1^+ = \{0,1\}$ (kurz: $f(z, s): Z \times S \rightarrow I_1^+$):

Strukturelement	um den Ursprung punktgespiegeltes Strukturelement
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni B = B^{-1}(\boxtimes)$	$\bar{B} \equiv \hat{B} = \{-(x, y) = (-x, -y) : (x, y) \in B\}$

- **Verschiebung** des Bildes um den Vektor $\vec{b} = (b_z, b_s)$:

$$f_b(z, s) = f(z - b_z, s - b_s)$$

Sprachliche Erläuterung: der Bildpunkt $f(z - b_z, s - b_s)$ kommt an die Stelle (z, s)

Vordergrund	Hintergrund
$f^{-1}(\boxtimes) = \{(x, y) : f(x, y) = \boxtimes\}$	$f^{-1}(\square) = \{(x, y) : f(x, y) = \square\}$

- **Komplement:**

$\overline{f(z, s)} \equiv f^c(z, s) \equiv Cf(z, s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - f(z, s)$	$Cf^{-1} \equiv Cf^{-1}(\{0,1\}) = (Cf)^{-1}(\{0,1\})$
--	--

- **Erosion:**

$[f \ominus B](z, s) \equiv E_B(f(z, s)) \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{(x,y) \in (z,s)+B \cap Z \times S} f(x, y)$	$f \ominus B = E_B f = \bigcap_{b \in B} f^{-1}_b(\boxtimes) \equiv \bigcap_{b \in B} f^{-1}_b$
--	---

Hausaufgabe: warum?

- **Dilatation:**

$[f \oplus B](z, s) \equiv D_B(f(z, s)) \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{(x,y) \in (z,s)+B \cap Z \times S} f(x, y)$	$f \oplus B = D_B f = \bigcup_{b \in B} f^{-1}_b(\boxtimes) \equiv \bigcup_{b \in B} f^{-1}_b$
---	--

Satz: $\models E_B = CD_B C$

Beweis:

$$CD_B Cf = C[D_B(Cf)] = C\left[\bigcup_{b \in B} Cf^{-1}_b\right] = C\left[\bigcup_{b \in B} f^{-1}_b(\square)\right] \stackrel{\text{De Morgansche Regeln}}{=} \bigcap_{b \in B} Cf^{-1}_b(\square) = \bigcap_{b \in B} f^{-1}_b(\boxtimes) = E_B f$$



Aufgabe U12:

Schritt #1: direkt zur Lösung

- **Monotonie:**

$$f_1(z, s) \leq f_2(z, s) \Rightarrow \text{Operator}(f_1(z, s)) \leq \text{Operator}(f_2(z, s))$$

- **AntiExtensivität:**

$$f(z, s) \geq \text{Operator}(f(z, s))$$

Satz:

(a)

$$X := (f_1)^{-1} \subseteq Y := (f_2)^{-1} \Rightarrow O_B(f_1)^{-1} \subseteq O_B(f_2)^{-1}$$

(b)

$$O_B f^{-1} \subseteq W := f^{-1}$$

Beweis:

Weil: Menge₁ ⊆ Menge₂ ⇒ C(Menge₁) ⊇ C(Menge₂)

basische Definition der Dilatation einer Menge E_B(X)

(a)

$$\begin{aligned} x \in O_B(X) &\Leftrightarrow x \in D_B E_B(X) \Leftrightarrow x \in D_B[E_B(X)] \Leftrightarrow x \in \{v \mid \exists b \in B: v + b \in E_B(X)\} \Leftrightarrow x \in \{v \mid \exists b \in B: v + b \in CD_B C(X)\} \\ &\Leftrightarrow x \in \{v \mid \exists b \in B: v + b \in C\{v' \mid \exists b' \in B: v' + b' \in C(X)\}\} \Rightarrow x \in \{v \mid \exists b \in B: v + b \in C\{v' \mid \exists b' \in B: v' + b' \in C(Y)\}\} \\ &\Leftrightarrow x \in \{v \mid \exists b \in B: v + b \in CD_B C(Y)\} \Leftrightarrow x \in \{v \mid \exists b \in B: v + b \in E_B(Y)\} \Leftrightarrow x \in D_B[E_B(Y)] \Leftrightarrow x \in O_B(Y) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} w \in O_B(W) &\Leftrightarrow w \in D_B[E_B(W)] \Leftrightarrow \exists b \in B: w + b \in E_B(W) \Leftrightarrow \exists b \in B: w + b \in \{v \mid \forall b' \in B: v + b' \in W\} \\ &\Rightarrow \exists b \in B: w + b - b \in W \Leftrightarrow w \in W \end{aligned}$$

Benötigte Voraussetzung - Strukturelement muss:

- entweder um den Ursprung **gespiegelt** [aka um 180° gedreht] werden
- oder **symmetrisch** (um den Ursprung aka Bezugspunkt) sein



Aufgabe U13:

Schritt #1: direkt zur Lösung

DWT von Spalten →

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0+0 & 0+2 & 0-0 & 0-2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3+1 & 8+8 & 3-1 & 8-8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1+3 & 8+8 & 1-3 & 8-8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0+8 & 8+8 & 0-8 & 8-8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0+1 & 0-1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2+8 & 2-8 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2+8 & 2-8 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4+8 & 4-8 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Alternativ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Schritt

3. Schritt

0. Schritt

1. Schritt

2. Schritt

Beobachtung: linke Seite

ist die **Transponierte**

rechter Seite

- also:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 0.5+5 & -0.5-3 & 0+1 & -1+0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5+6 & -3-2 & -1-4 & 0+0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0.5-5 & -0.5+3 & 0-1 & -1-0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5-6 & -3+2 & -1+4 & 0-0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.75 & -1.75 & 0.5 & -0.5 \\ 5.5 & -2.5 & -2.5 & 0 \\ -2.25 & 1.25 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.75+5.5 & -1.75-2.5 & 0.5-2.5 & -0.5+0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2.75-5.5 & -1.75+2.5 & 0.5+2.5 & -0.5-0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2.25 & 1.25 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.125 & -2.125 & -1 & -0.25 \\ -1.375 & 0.375 & 1.5 & -0.25 \\ -2.25 & 1.25 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

DWT von Reihen →

Randbemerkung:

Es gibt eine schöne Analogie zwischen dem Kompromiss „**Fourier / Wavelet**“ und dem quantenmechanischen Heisenbergschen Unschärfeprinzip „**Ort / Impuls**“:

- **Fourier-Transformation** liefert **ausführliche** Information über die Frequenzverteilung, aber so gut wie **keine Information** über die räumliche Verteilung dieser Frequenzen
- **Wavelet-Transformation** liefert zum Teil die beiden Informationen