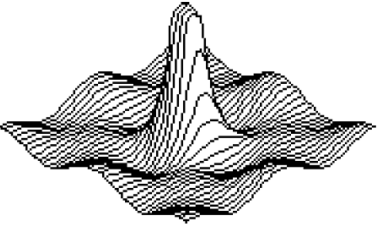
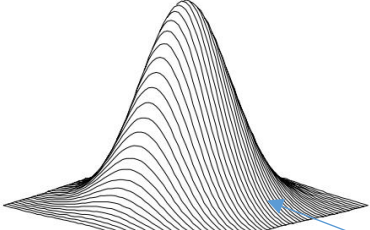


Aufgabe U7:

Schritt #1: besserer Glättungsfilter als Mittelwertfilter – intuitiver Ansatz

Fun Fact: $\frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+1+1+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{1+1+1+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Transferfunktion aka Übertragungsfunktion von Tiefpassfiltern			
3x3-er Mittelwertfilter		3x3-er Binomialfilter aka ganzzahlige & schnelle Gaußfilter-Approximation	
Sinc-Funktion aka Kardinalsinus	Dunkle Materie ☹	Gauß-Glocke $F(u, v) = (\cos(\pi u/Z))^2 \cdot (\cos(\pi v/S))^2$	← Hausaufgabe: checkt's
	$\frac{1}{1+1+1} \cdot [1 \ 1 \ 1] * \frac{1}{1+1+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		$\frac{1}{1+2+1} \cdot [1 \ 2 \ 1] * \frac{1}{1+2+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

bei ausreichend großer Anzahl von Frequenzen im Frequenzraum

Beobachtung: schöne Isotropie (d.h. Richtungsunabhängigkeit)

Mögliches Erfindungsschema ☺ von 1D Binomialfiltern – wie kommt man auf Binomialfilter?

Bausteine	Verknüpfung	normalisierte aka normierte 1D Binomialfilter	coole ☺ Eigenschaften
[1 1]	[1 1] * [1 1]	$[b_1] = \left(\frac{1}{1+1}\right)^1 \cdot [1 \ 1]^{*1} = \frac{1}{1+1} \cdot [1 \ 1]$ $[b_2] = \left(\frac{1}{1+1}\right)^2 \cdot [1 \ 1]^{*2} = \frac{1}{1+1} \cdot [1 \ 1] * \frac{1}{1+1} \cdot [1 \ 1] = \frac{1}{1+2+1} \cdot [1 \ 2 \ 1]$ $[b_3] = \left(\frac{1}{1+1}\right)^3 \cdot [1 \ 1]^{*3} = \frac{1}{1+3+3+1} \cdot [1 \ 3 \ 3 \ 1]$	$\sum_{i=0}^k [b_k](i) = 2^k$ $b_n * b_m = b_{n+m}$ $b_k \rightarrow G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
triviale 1D Glättungsfilter	Faltung	Verkettungen	Zentraler Grenzwertsatz beweist diese zu Hause ☺

Hausaufgabe: unter welchen Voraussetzungen an μ und σ erreicht man die Annäherung $G(i) \approx 2^{-k} \cdot \binom{k}{i}$?
 [Hinweis: was wäre bei $\mu = \frac{k}{2}$ und $\sigma^2 = \frac{k}{4}$? – guckt euch die Binomialverteilung und das Zufallsbrett an]

Pascalshes Dreieck: Veranschaulichung von Koeffizienten eines Binoms $(x + y)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot x^i \cdot y^{k-i}$

Schritt #2: Zuwachs an Dimension (1D -> 2D)

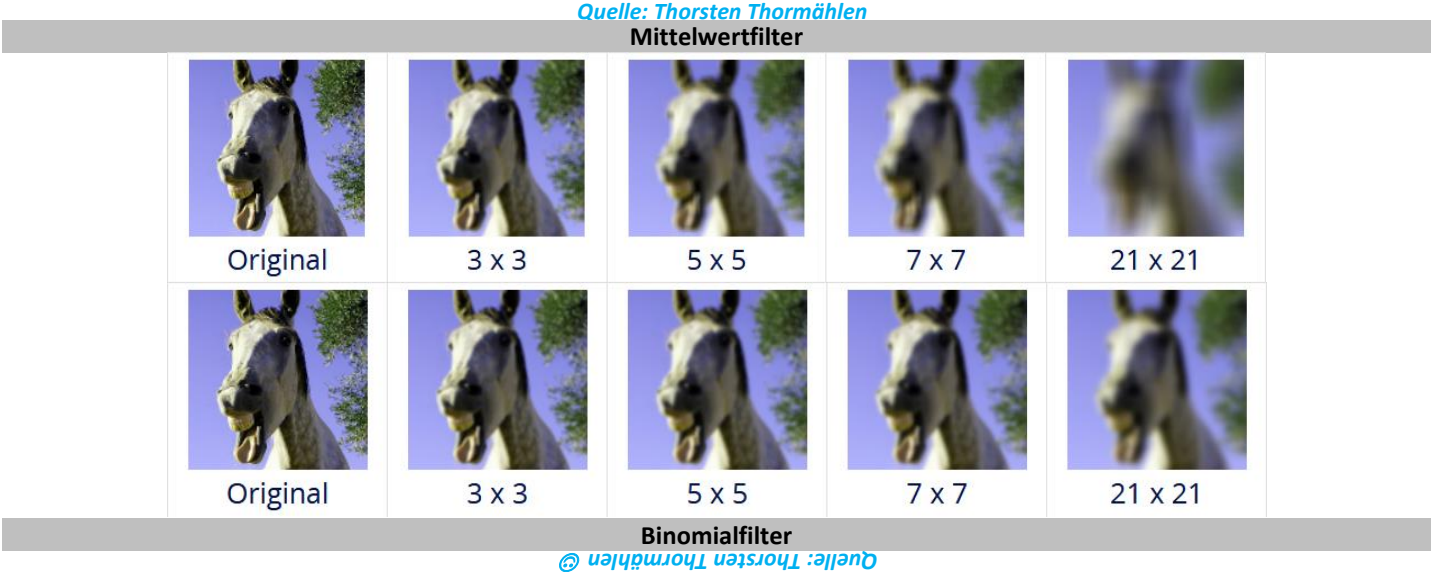
2D Binomialfilter = 1D Binomialfilter & x/y *-Separierbarkeit

$$[{}^2b_{m \times n}] = [b_m]^T * [b_n]$$

denn die 2D-Gaußfunktion $G(x, y) = \text{Amplitude} \cdot e^{-\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)}$ ist x/y-separierbar (wegen $e^{x^2+y^2} = e^{x^2} \cdot e^{y^2}$)

Aufgabe U7:

Schritt #3: Anwendungsbeispiele



Schritt #4: Lösung der Aufgabe

$$B_2^T \cdot B_3 = \frac{1}{2^2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^T \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \cdot [1, 2, 1]^T \cdot \frac{1}{8} \cdot [1, 3, 3, 1] = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{8} \cdot [1, 3, 3, 1] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Interessanter Nebenbeobachtung für Mathe Fans ☺:

Achtung: **Faltung** ist im Allgemeinen **nicht** das Gleiche wie **Matrixmultiplikation**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * [1, 3, 3, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1, 3, 3, 1]$$

Beobachtung: **Faltung** zweier Vektoren (also, **Spalten-** und **Zeilenvektoren**) liefert **das gleiche Ergebnis** wie deren **Matrixmultiplikation** (also **dyadisches** aka **tensorielles** aka **äußeres Produkt**)

➔ **Hausaufgabe:** warum und wann gilt sowas im Allgemeinen?

Hinweis: konstruiert ein Verfahren bei dem man jede Faltung [einfachheitshalber, wählt den Faltungsmodus „valid“] zweier Matrizen durch die **Matrixmultiplikation** deren Umformungen darstellt – nimmt eine kleine Bildmatrix, einen noch kleineren ☺ Kern und versucht so ein Verfahren selber zu basteln.

dünnbesetzte doppelblock-zyklische Matrizen [aka **Toeplitz-Blockmatrizen**] könnten euch auf dem Lösungsweg recht behilflich sein ☺

Aufgabe U7:

Schritt #5: Eignung als ein besserer Tiefpassfilter [am Beispiel zweier **periodischen Störungen**]

$$\frac{1}{32} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -2 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & -2 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & -2 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \dots \\ \dots & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \dots \\ \dots & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

2D Binomialfilter zeigen hiermit ein **besseres Tiefpassverhalten** als Mittelwertfilter

Aufgabe U9:

Schritt #1: lineare Filter einer anderen Art – **Differenzenfilter** aka **Kantenoperatoren** aka **Ableitungsfilter** aka **Gradientenfilter**

- **Koeffizienten** haben **unterschiedliche Vorzeichen** – dadurch sind **Farbintensitätsänderungen** (d.h. u.a. ☺ **Kanten**) ausgeprägter [**Hochpassfilter**]
- **Koeffizienten** **summieren** sich **zu Null** – je **homogener** ein Bildbereich, umso näher sind i.d.R. dessen gefaltete Ausgangswerte zu Null (**zum Schwarz**)
- Der Randbehandlungsmodus „**Zero Padding**“ wird gegenüber „**Last Value**“ (d.h. **Außenbereich**(x, y) = **Bild**(**nächster Randpunkt**)) und „**zyklische Wiederholung**“ (d.h. **Ortsraum**($z \pm [m] \cdot Z, s \pm [n] \cdot S$) = **Bild**(z, s)) Modi **bevorzugt** – sonst können unerwünschte **Artefakte** entstehen (Quelle für **falsche Interpretierung/Erkennung** & **Pseudokanten**)
- sind **extrem rauschempfindlich** – um diese Empfindlichkeit **zu verringern**, man **faltet Differenzenfilter mit Glättungsfiltern** [es wird i.d.R. **orthogonal** zu **Ableitungsrichtung** **geglättet**]
- basieren auf **diskrete** (aka **endliche** aka **finite**) **Differenzen**:

Bildquelle: Wiki

diskrete Approximation von $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$	Faltungsmaske	im folgenden Koordinatensystem	nachvollziehbare Begründung – kontinuierliches Schema
vorwärts $\Delta_1^1 f_x \stackrel{\text{def}}{=} f(x+1, y) - f(x, y)$	[0 -1 1]	im folgenden Koordinatensystem	
rückwärts $\nabla_1^1 f_x \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y) - f(x-1, y)$	[-1 1 0]	$x-1, y+1$ $x, y+1$ $x+1, y+1$ $x-1, y$ x, y $x+1, y$ $x-1, y-1$ $x, y-1$ $x+1, y-1$	
symmetrisch ($\frac{\text{vorwärts} + \text{rückwärts}}{2}$) $\delta_1^1 f_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \cdot (f(x+1, y) - f(x, y) + f(x, y) - f(x-1, y))$	$\frac{1}{2} \cdot [-1 \quad 0 \quad 1]$	aka Differenzenstern (engl. „ <i>stencil</i> “) [wird bei numerischen Lösungen von ODEs & PDEs mit Anfangs- & Randbedingungen eingesetzt]	

Schritt #2: Herleitung & Genauigkeitsbereich von diskreten Approximationen

Für **n-mal differenzierbare** Funktionen $f(X)$ [intuitiverweise erweiterbar auf mehrere Variablen], laut **Taylorformel**:

$$f(X, y) = \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k f(x, y)}{(\partial x)^k} \cdot (X - x)^k + \text{Restglied}_n f(X, x),$$

wobei $\lim_{X \rightarrow x} \left| \frac{\text{Restglied}_n f(X, x)}{(X-x)^n} \right| = 0$ – also, in einfachen Worten, das **Restglied** **wächst langsamer** als $|X - x|^n$ (d.h. als **Schrittweite**)

Aufgabe U9:

In unseren Formaten:

$X = x + 1$	$X - x = 1$
$X = x - 1$	$X - x = -1$

Schritt #3: Taylorformel in diesen Formaten

**$n = 1 \Rightarrow$ Genauigkeit
1. Grades (d.h. **niedriger**)**

$$f(x+1, y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot (1)^1 = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx f(x+1, y) - f(x, y) \quad \text{vorwärts}$$

$$f(x-1, y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot (-1)^1 = f(x, y) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x-1, y) \quad \text{rückwärts}$$

**$n = 2 \Rightarrow$ Genauigkeit
2. Grades (d.h. **höher**)**

$$f(x+1, y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot (1)^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2} \cdot (1)^2 = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2}$$

$$f(x-1, y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot (-1)^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2} \cdot (-1)^2 = f(x, y) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (f(x+1, y) - f(x-1, y)) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \cdot (f(x+1, y) - f(x-1, y)) \quad \text{symmetrisch}$$

$$f(x+1, y) + f(x-1, y) \approx 2 \cdot f(x, y) + \frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2} \approx f(x-1, y) - 2 \cdot f(x, y) + f(x+1, y) \quad \text{entspricht der Maske } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zentrale ☺ **Randbemerkung #1:** **y-Richtungsableitungen** 1. & 2. Ordnungen (d.h. **partielle Ableitungen** nach der **zweiten Variable**) werden auf die gleiche Weise behandelt

Zentrale ☺ **Randbemerkung #2:** da es für jede Richtung \vec{r} gilt **\vec{r} -Richtungsableitung = $\langle \text{Gradient}, \vec{r} \rangle$** , zeigt die **Richtung des Gradientenfeldes** (aka **Gradientenvektors**) zum **steilsten Anstieg** der zugehörigen Funktion (deren Gradient also berechnet wird – in unserem Fall, **der Bildfunktion**), der **Gradientenbetrag** ist dann die **Stärke dieser Steigung**

Hausaufgabe: beweist die Gleichung \vec{r} -Richtungsableitung = $\langle \text{Gradient}, \vec{r} \rangle$



Aufgabe U9:

Schritt #4: einige Beispiele von Differenzenfiltern

beachtet: $\frac{1}{2} \cdot [1 \ 0 \ -1] + \frac{1}{4} \cdot [1 \ 2 \ 1]^T = -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Nebenbemerkung: $[-1 \ 0 \ 1] = [-1 \ 1] * [1 \ 1]$
[also, bisschen **Glättung** schon mal drin 😊]

Richtungsabhängige (aka anisotrope) Kantenoperatoren		
Glättungsfilter	Differenzenfilter	$D * G$
Mittelwert- aka Boxfilter	$\frac{1}{3} \cdot [1 \ 1 \ 1]^T$	$\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Mittelwert- aka Boxfilter	$\frac{1}{3} \cdot [1 \ 1 \ 1]$	$\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Binomialfilter	$\frac{1}{4} \cdot [1 \ 2 \ 1]^T$	$\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sobel}_x$
Binomialfilter	$\frac{1}{4} \cdot [1 \ 2 \ 1]$	$\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sobel}_y$
einigermaßen richtungsunabhängige (aka quasi-isotrope) Kantenoperatoren		
Differenzenfilter _x 2. Ordnung	Differenzenfilter _y 2. Ordnung	Differenzenfilter _x + Differenzenfilter _y
$[1 \ -2 \ 1]$	$[1 \ -2 \ 1]^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Laplace}$

Nebenbemerkung: $[1 \ -2 \ 1] = [-1 \ 1] * [-1 \ 1]$

Anmerkungen zu Laplace-Filter:

- Im kontinuierlichen Fall weist der Laplace-Operator die **Rotationsinvarianz** auf – im diskreten Fall wird’s versucht solche **Drehungsinvarianz** zu approximieren
- Laplace** zieht nur 4-Nachbarschaft in Betracht – zwecks Berücksichtigung aller 8-Nachbarn: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Laplace-Filter besitzt **hohe Rausanfälligkeit** – diesbezüglich gibt es einige Modifikationen mit Glättung (zB. **LoG-Filter** – engl. „*Laplacian of Gaussian*“)
- Im Gegensatz zu anderen Kantenoperatoren (von **1. Ordnung**), man kriegt einen **Hinweis auf eine Kante** bei einem **Nulldurchgang** (**Hausaufgabe**: warum?)

Anmerkungen zu Sobelfiltern:

- das **Subskript x** bei $Sobel_x$ bezeichnet die **Ableitungsrichtung**, nicht die Richtung von (am besten) erkennbaren Kanten – **Kantenrichtung ist immer orthogonal zu Ableitungsrichtung** (also, bei $Sobel_x$ sind es **senkrechte Kanten**)
- man kann (nicht unbedingt 😊 **Sobel**)filter auch für die **anderen Ableitungsrichtungen** haben:

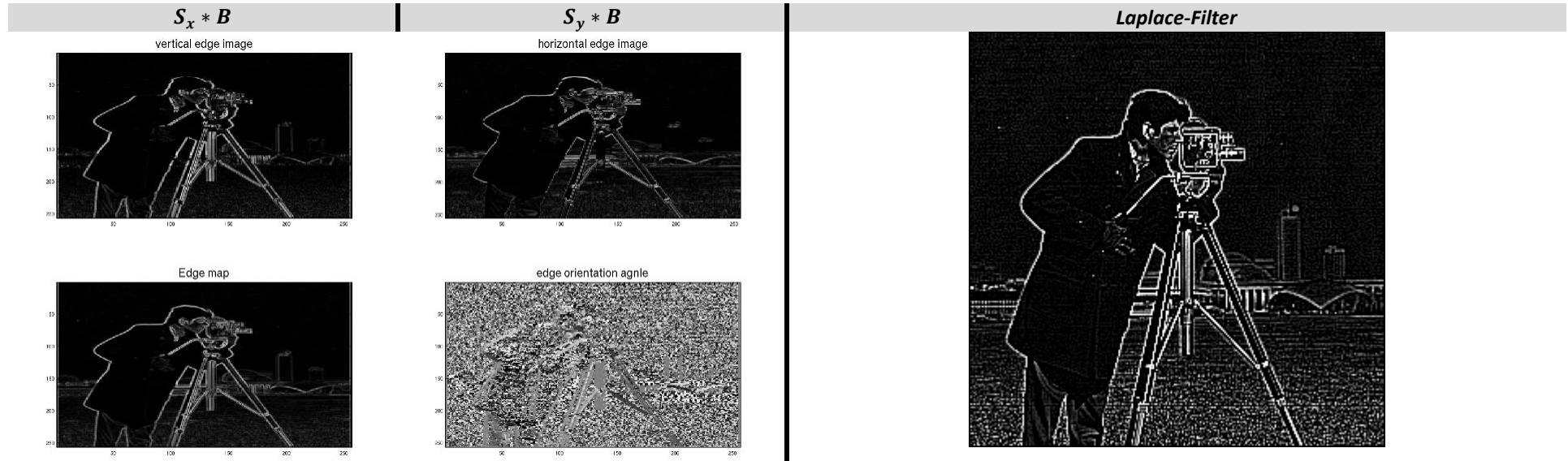
Lifhack: Seitenverhältnis (engl. “aspect ratio”) **4Z:5S** entspricht (ungefähr) der Winkelgröße **38°**: $\arctan2(4/5) \approx 38^\circ$

$Sobel_{45^\circ \cup} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = Sobel_{135^\circ \cup}$	$Sobel_{135^\circ \cup} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = Sobel_{-45^\circ \cup}$	$Sobeloid_{120^\circ \cup} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \pm 0 \\ -1 & -1 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 \\ \pm 0 & \pm 0 & \pm 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \end{bmatrix} = Sobeloid_{-30^\circ \cup}$
---	--	--

Hausaufgaben: überprüft ob sich Laplace-Filter separieren lässt (d.h. ob $Laplace = 1DFilter_1 * 1DFilter_2$) & berechnet die **Übertragungsfunktion** des Laplace-Filters

Aufgabe U9:

Schritt #4: Anwendungsbeispiele (Kameramann voll im Trend 😊)



$$\sqrt{([S_x * B](i,j))^2 + ([S_y * B](i,j))^2}$$

$$\left[\arctan2 \left(\frac{[S_y * B](i,j)}{[S_x * B](i,j)} \right) \right]$$

„alternativ“ einfach $|[S_x * B](i,j)| + |[S_y * B](i,j)|$, also die Matrix der komponentenweisen Summe von Beträgen aus $S_x * B$ und $S_y * B$ (Grund: rechnerisch effizienter)

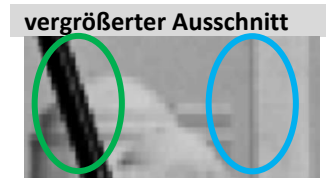
Gradientenrichtung für jedes Pixel (i, j)

lokale Sobel-Maxima = Laplace-Nulldurchgänge

prinzipieller Vergleich von Laplace und Sobel: Nullstellen von Ableitungen 2. Ordnung sind Extremstellen von Ableitungen 1. Ordnung (d.h. Maxima des Gradientenbetrages)

Hausaufgabe: checkt ob die obigen Ergebnisbilder eher von Prewitt-Operator (d.h. $\frac{1}{3} \cdot [1 \ 1 \ 1]^T * \frac{1}{2} \cdot [-1 \ 0 \ 1]$ und $\frac{1}{3} \cdot [1 \ 1 \ 1] * [-1 \ 0 \ 1]^T$) und nicht von Sobel sind [Matlab / OpenCV-Python / ImageJ & Kameramänner 😊 stehen zu eurer Verfügung]

Kritische Anmerkung: beim $S_x * B$ (Bild oben links), warum sind einige schräge Kanten heller als streng vertikale Kanten?



beim Ursprungsbild B liefert 2 Gründe dazu:

- ✓ schräge Kanten: Helligkeitsänderungen beim Übergang in x -Richtung sind stärker
- ✓ schräge Kanten sind zwangsmäßig (wegen pixeliger Natur) vom Treppeneffekt betroffen – sind also stückweise vertikal (der Intensitätsverlauf jedes solchen Stückes hängt vom Glättungsgrad des Bildes ab)



Schritt #5: Lösung der Aufgabe

innere Bildpunkte

Nebenbeobachtung: Minuszeichen führt lediglich zur Inversion von Farbtintensitäten - strukturelles Verhalten wird nicht gestört [Minus ist also von kosmetischen Wirkungsstoffen ☺]

(a)

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -8 & -12 & -16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +4 & +8 & +12 & +16 & +14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & -12 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & -16 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

Beispiel von Randartefakten

Nebenbeobachtung: Ausgangswerte (auch wenn negativ) werden verhältnismäßig umskaliert und in [0; Max] eingeschlossen (entsprechend der Farbtiefe des Bildformates)

(c)

Ausführliche Details zu Richtung: Werte $-\pi$ entsprechen der Differenzmaske $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (zunächst war es $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, die Faltung $S_x * B$ musste aber die Maske definitionsmäßig umdrehen) – deshalb heißt es „rechte Pixelwerte von linken abziehen“

Gradientenbetrag: $\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{0^2 + (-8)^2} & \dots & \dots & \sqrt{0^2 + (-8)^2} \\ \sqrt{0^2 + (-8)^2} & \dots & \dots & \sqrt{0^2 + (-8)^2} \\ \sqrt{0^2 + (-8)^2} & \dots & \dots & \sqrt{0^2 + (-8)^2} \\ \sqrt{0^2 + (-8)^2} & \dots & \dots & \sqrt{0^2 + (-8)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Erläuterung: Einsen-Matrix bedeutet dass Intensitätsänderungen überall auf dem Bild konstant sind und die Änderungsgröße eine Intensitätsstufe beträgt

Gradientenrichtung: $\begin{bmatrix} \text{atan2}(0/-1) & \dots & \dots & \text{atan2}(0/-1) \\ \text{atan2}(0/-1) & \dots & \dots & \text{atan2}(0/-1) \\ \text{atan2}(0/-1) & \dots & \dots & \text{atan2}(0/-1) \\ \text{atan2}(0/-1) & \dots & \dots & \text{atan2}(0/-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \pi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & \pi & \pi \end{bmatrix}$

Erläuterung: π -Matrix deutet die waagerechte Richtung der größten Intensitätsänderungen überall auf dem Bild an

Aufgabe U10:

Schritt #1: Lösung der Aufgabe

(siehe Seiten 5 & 6 ☺)