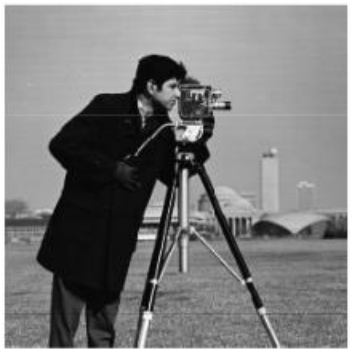
Aufgabenstellungen:	*Übungen_03*	*http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia17_ub04.pdf*
	Übungsblatt_02	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia20_ue02.pdf

Aufgabe 3:

Schritt #1: das Thema der Aufgabe bestimmen und begreifen

Geometrische Bildtransformation: ist eine mathematische (im Grunde – eine **formale**) Beschreibung einer **räumlichen** Transformation eines Bildes (zu viele unbestimmte Artikel ☺)



Scherung = Rotationen + Skalierungen
Hausaufgabe: warum?

Detailwissen: das sieht nach einer waagerechte Scherungstransformation aus

So eine geometrische Transformation des Bildes $B(z,s)$ schaut dann (algebraisch ☺) folgendermaßen aus:

Koordinatenwechsel: entweder bewegt/deformiert sich das Bild oder das ursprüngliche Koordinatensystem (in Gegenrichtung)

$$TB(z,s) = B(z',s')$$

Wobei:

Normalerweise kommen noch Interpolationstechniken dazu …

$$\begin{cases} z' = z'(z,s) \\ s' = s'(z,s) \end{cases} \text{und, bei } \textbf{Umkehr}\text{transformation } T^{-1}\text{: } \begin{cases} z = z(z',s') \\ s = s(z',s') \end{cases}$$

Für Mathe Fans☺: es stellt sich die Frage, ob es so eine **Inverse** überhaupt gibt

~~DISTORTION~~

Bereichseinschränkung: nur **affine** Transformationen, d.h., für fixierte Werte a_i und b_i (wobei $i \in \{t,z,s\}$):

linearer Anteil

$$\begin{cases} z' = z'(z,s) = a_t + a_z \cdot z + a_s \cdot s \\ s' = s'(z,s) = b_t + b_z \cdot z + b_s \cdot s \end{cases} \text{oder, } \textbf{kurz} \text{ in Matrixform: } \begin{bmatrix} z' \\ s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_z & a_s \\ b_z & b_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \end{bmatrix} \text{ oder } \textbf{noch kürzer} \text{ in homogener Matrixform: } \begin{bmatrix} z' \\ s' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_z & a_s & a_t \\ b_z & b_s & b_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Weitere **Einschränkung:** die Invertierbarkeit der Matrix $\begin{bmatrix} a_z & a_s \\ b_z & b_s \end{bmatrix}$ wird i.d.R. bereits in der Definition von affinen Transformationen vorausgesetzt (**Hausaufgabe**: versucht zu klären, warum). Der Singulärwertzerlegungssatz besagt dann - so eine affine Transformation besteht aus Kombinationen (d.h. homogenen Matrixmultiplikationen) von:

Verschiebungstransformationen (aka Translationsmatrizen)	(**nicht unbedingt** gleichmäßigen) **Skalierung**stransformationen (können verzerren)
Drehungs- & **Spiegelung**stransformationen (aka Rotations & Reflexionsmatrizen)	**Scherung**stransformationen (verursachen Verzerrung aka Dehnung/Stauchung)

Schritt #2: tatsächliche Lösung der Aufgabe (mit einer Prise theoretischer Grundlagen ☺):

Mathematischer **Satz #1**: jede 2D affine Transformation hat eine Inverse (**Hausaufgabe**: check ob sie dabei eindeutig ist ☺) und diese Inverse an sich ist auch affin.

Fundamentaler **Satz #2**: für jeden 3 x 3 bipartiten Graphen

$$\begin{matrix} \vec{p_1}(p_{11}, p_{12}) & \longrightarrow & \vec{p_1}'(p_{11}', p_{12}') \\ \vec{p_2}(p_{21}, p_{22}) & \longrightarrow & \vec{p_2}'(p_{21}', p_{22}') \\ \vec{p_3}(p_{31}, p_{32}) & \longrightarrow & \vec{p_3}'(p_{31}', p_{32}') \end{matrix}$$

von **nichtkollinearen** (**Pass** aka **Referenz**)Punkten auf jeder Seite, es gibt die einzigartige affine Transformation, die die linke Seite auf die rechte Seite abbildet.

(a) + (b)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 0b + u = 2 \\ 2c + 0d + v = 5 \\ 0a + b + u = 1 \\ 0c + d + v = 3 \\ 0a - b + u = 3 \\ 0c - d + v = 3 \end{cases} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 0b + u = 2 \\ 2c + 0d + v = 5 \\ 0a + b + u = 1 \\ 0c + d + v = 3 \\ 2u = 4 \\ 2v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 - 2 \\ 2c = 5 - 3 \\ b = 1 - 2 \\ d = 3 - 3 \\ u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 1 \\ b = -1 \\ d = 0 \\ u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$$

Also:

Korrekte Reihenfolge nicht vergessen

$$\begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Verschiebung}\left[\overrightarrow{(2,3)}\right] \circ \boldsymbol{Drehung}[90^0 \circlearrowleft]$$

Randbemerkung: der Wolkenkratzer ☺ da oben ist einfach ne Matrizengleichung der Art $[X] \cdot [A] = [B]$ und lässt sich im Allgemeinen (nicht unbedingt zeit)effizienter lösen:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}$$

Wir haben also das ganze Problem auf die Berechnung von $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ reduziert – und diese Inverse apriorisch existiert, denn die Determinante der Matrix $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ stellt den vorzeichenbehafteten Flächeninhalt des Dreiecks mit den Spitzen in p_1', p_2', p_3' dar, und diese Fläche ist, **unter der Nichtkollinearitätsannahme,** ungleich Null.

Aufgabe U8:

Kurze Anmerkung: im Grunde genommen, das gleiche „Ent-„/“De-“ Thema (also **Inversen** aka **Umkehrtransformationen**)

(a)

im mathefreien ☺ Anwendungsbereich wird das wie *„**will mein** pures **Bild zurück**“* klingen ☺

Schritt #1: mathematische Reifungsphase der Aufgabe (paraphrasiert, ein „**Warum** diese Aufgabe“-Kontext)

Da die Faltung assoziativ ist (**Hausaufgabe**: übrigens beweist es oder schaut euch einen von gültigen Beweisen an – hunderte Quellen allein im WWW-Raum vorhanden ☺):

$$K^{*-1} * K * B = K^{*-1} * (K * B) = (K^{*-1} * K) * B = I_* * B = B$$

1D-Faltungsmasken sind einfacher zu behandeln und repräsentieren zudem (in Bezug auf **Schachtelung/Komposition**) Bausteine einer wesentlich schnelleren Umsetzung entsprechendes 2D-Faltungsvorgangs:

Beispiele	
Glättungsfilter [am Beispiel vom 3x3-**Mittelwertfilter]**	**Kantenfilter [**am Beispiel vom waagerechten **Sobelfilter]**
$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} * \frac{1}{3}[1 \quad 1 \quad 1] \overset{?}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3}[1 \quad 1 \quad 1] * \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&0&-2\\1&0&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} * [1 \quad 0 \quad -1] \overset{?}{\Leftrightarrow} [1 \quad 0 \quad -1] * \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

Hausaufgabe: checkt's

Zusatzbeobachtung: aus vorgegebenen Ausgangs- 9, Filter- 3 und Bildvektorlänge 7 ergibt sich der Faltungsmodus **„full“**, denn $9 = 3 + 7 - 1$

Schritt #2: Lösung der Aufgabe

Laut 1D-Faltungsformel, für $n = 0..8$:

$$[F * G](n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{2} F(i) \cdot G(n-i) = \frac{1}{4} \cdot G(n) + \frac{1}{2} \cdot G(n-1) + \frac{1}{4} \cdot G(n-2) = \boxed{\frac{1}{4} \cdot \big(1 \cdot G(n) + 2 \cdot G(n-1) + 1 \cdot G(n-2)\big) = I(n)}$$

In Matrixschreibweise:

Flacherdler-Witz☺: das Zeichen ⋱ steht für *“turtles all the way down”* ☺

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \boldsymbol{M}_{\mathbf{9\,x\,7}} \cdot \boldsymbol{G}_{\mathbf{7\,x\,1}} = \boldsymbol{I}_{\mathbf{9\,x\,1}}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix}1&0&0&\ddots&0\\2&1&0&\ddots&0\\1&2&1&\ddots&0\\0&1&2&\ddots&0\\0&0&1&\ddots&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&\ddots&1\\0&0&0&\ddots&2\\0&0&0&\ddots&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}G(0)\\G(1)\\G(2)\\G(3)\\G(4)\\G(5)\\G(6)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Laut **Lösbarkeitssatz linearer Gleichungssysteme** (LS-LGS): dieses da oben ist lösbar genau dann, wenn $Rang(\boldsymbol{M}_{\mathbf{9\,x\,6}}) = Rang(\boldsymbol{M}_{\mathbf{9\,x\,6}}|\boldsymbol{I}_{\mathbf{9\,x\,1}})$: falls $= 7$, dann eindeutig; falls < 7, dann ∞–deutig

Hausaufgabe: überprüft (beispielsweise durch die Anwendung gaußsches Eliminationsverfahrens), dass sich dieses LSD **nicht lösen** lässt, und zwar für beliebige Bildvektorlänge.

(b)

Schritt #1: unverbindliche ☺ **Annahme**

Zwecks Einfachheit von Berechnungen & Senkung der Anzahl von Veränderlichen, sei F^+ ein symmetrischer Vektor (aka **Palindrom**): $\boldsymbol{F^+} = [\boldsymbol{d} \quad \boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{d}]$

Schritt #2: dann wird das obige LGS zu

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&\ddots&0\\2&1&0&\ddots&0\\1&2&1&\ddots&0\\0&1&2&\ddots&0\\0&0&1&\ddots&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&\ddots&1\\0&0&0&\ddots&2\\0&0&0&\ddots&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{F^+}(0)\\\mathbf{F^+}(1)\\\mathbf{F^+}(2)\\\mathbf{F^+}(3)\\\mathbf{F^+}(4)\\\mathbf{F^+}(5)\\\mathbf{F^+}(6)\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&\ddots&0\\2&1&0&\ddots&0\\1&2&1&\ddots&0\\0&1&2&\ddots&0\\0&0&1&\ddots&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&\ddots&1\\0&0&0&\ddots&2\\0&0&0&\ddots&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{d}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}d\\2d+c\\d+2c+b\\c+2b+a\\2b+2a\\a+2b+c\\b+2c+d\\c+2d\\d\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}d\\2d+c\\d+2c+b\\c+2b+a\\2b+2a\\a+2b+c\\b+2c+d\\c+2d\\d\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Schritt #2: lass uns 4-stellige **legendresche Verlustfunktion** (aka **Summe der Abweichungsquadrate**) und dadurch unsere **Optimierungsaufgabe** (aka **MKQ**) bilden:

$$\boxed{S(a,b,c,d) = \sum_{n=0}^{8}\left([M\cdot F^+](n) - 4\cdot I(n)\right)^2 \longrightarrow Min}$$

In entwickelter quadratischen Form:

$$S(a,b,c,d) = 16 - 16a - 16b + 6a^2 + 16ab + 4ac + 14b^2 + 16bc + 4bd + 12c^2 + 16cd + 12d^2 \longrightarrow Min$$

Schritt #3: laut Algorithmus zum Auffinden von mehrdimensionalen Extremstellen

- Wir berechnen den **Gradienten** unserer Funktion $S(a,b,c,d)$:

$$\nabla S(a,b,c,d) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial S}{\partial a},\frac{\partial S}{\partial b},\frac{\partial S}{\partial c},\frac{\partial S}{\partial d}\right]^T = \begin{bmatrix}12a+16b+4c-16\\16a+28b+16c+4d-16\\4a+16b+24c+16d\\4b+16c+24d\end{bmatrix}$$

- Wir lösen das LGS $\boldsymbol{\nabla S(a,b,c,d) = 0}$:

$$\begin{bmatrix}12a+16b+4c-16\\16a+28b+16c+4d-16\\4a+16b+24c+16d\\4b+16c+24d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3&4&1&0\\4&7&4&1\\1&4&6&4\\0&1&4&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\0\\0\end{bmatrix}$$

Hausaufgabe: löst dieses LGS (beispielsweise) durch die Anwendung gaußsches Eliminationsverfahrens

Falls ich keine Rechenfehler gemacht hab, solltet ihr die folgende Lösung bekommen:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \left(\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{9}}, -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\right) = \frac{1}{9}\cdot(40,-24,12,-4)$$

- Wir berechnen die übrigens symmetrische **Hesse-Matrix** von $S(a,b,c,d)$:

Hesse-Matrix einer quadratischen Form ist immer konstant – **hier**: unabhängig von (a,b,c,d) Werten

$$H_S(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial a} & \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial c} & \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial d} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial b} & \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial c} & \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial d} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial c \partial a} & \frac{\partial^2 S}{\partial c \partial b} & \frac{\partial^2 S}{\partial c \partial c} & \frac{\partial^2 S}{\partial c \partial d} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial d \partial a} & \frac{\partial^2 S}{\partial d \partial b} & \frac{\partial^2 S}{\partial d \partial c} & \frac{\partial^2 S}{\partial d \partial d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 4 & 0 \\ 16 & 28 & 16 & 4 \\ 4 & 16 & 24 & 16 \\ 0 & 4 & 16 & 24 \end{bmatrix}$$

- Wir bestimmen die Definitheit unserer Hesse-Matrix an gefundenen Nullstellen (hier: aka **kritischen Stellen**) des LGS $\boldsymbol{\nabla S}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \mathbf{0}$

Eigenwerte der in unserem Fall konstanten Hesse-Matrix sind:

$$\lambda_1 \approx 0.23922\,, \lambda_2 \approx 6.49262\,, \lambda_3 \approx 27.68160\,, \lambda_4 \approx 53.58653$$

Also, **alle E-Werte sind positiv**, d.h. unsere Verlustfunktion $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ erreicht ihr einziges lokales **Minimum** an der Stelle $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \left(\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{9}}, -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\right)$

Also, der beste Kandidat für die Rolle einer Quasi-Faltungsinverse:

$$F^+ = \frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix}-4 & 12 & -24 & 40 & -24 & 12 & -4\end{bmatrix}$$

Näherungsfehler durch den direkten elementweisen Vergleich mit dem ***Idealfall*** (d.h. bei „echter" Faltungsinverse):

grausame ☺ Realität	$\boldsymbol{F} * \boldsymbol{F}^+ = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\cdot[\mathbf{-1} \;\; \mathbf{1} \;\; \mathbf{-1} \;\; \mathbf{1} \;\; \mathbf{8} \;\; \mathbf{1} \;\; \mathbf{-1} \;\; \mathbf{1} \;\; \mathbf{-1}] \approx [\mathbf{-0.11} \;\; \mathbf{0.11} \;\; \mathbf{-0.11} \;\; \mathbf{0.11} \;\; \mathbf{0.89} \;\; \mathbf{0.11} \;\; \mathbf{-0.11} \;\; \mathbf{0.11} \;\; \mathbf{-0.11}]$
Idealfall	$\boldsymbol{F} * \boldsymbol{F}^+ = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\cdot[\mathbf{-0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{-0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{9} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{-0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{-0}] = [\mathbf{-0.00} \;\; \mathbf{0.00} \;\; \mathbf{-0.00} \;\; \mathbf{0.00} \;\; \mathbf{1.00} \;\; \mathbf{0.00} \;\; \mathbf{-0.00} \;\; \mathbf{0.00} \;\; \mathbf{-0.00}]$

Randbemerkung: die Annäherung kann auch bei der Einschränkung von symmetrischen Faltungsmasken akzeptabel sein.

Aufgabe U6:

Welches Rauschen wird betrachtet

Normalverteilt aka **Gaußsches**
$\forall x, y: [R](x,y) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
[**Varianz** bezeichnet die **Stärke** des Rauschens]

Additiv und pixelweise unkorreliert (aka **weiß**)
[noch mehr: stochastisch unabhängig]

Dunkelrauschen und (annähernd) auch (poissonverteiltes) **Photonenrauschen** wird dadurch modelliert

Schritt #1: laut **Distributivität** der **Faltung**

$$K * B - K * B_O = K * (B - B_O) = K * R$$

Dann, laut **Faltungsdefinition**:

$$[K * R](i,j) = \sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}\frac{1}{9}\cdot 1 \cdot [R](i-z, j-s) = \frac{1}{9}\cdot\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}[R](i-z,j-s)$$

Schritt #2: wegen **Linearität** des **Erwartungs**wertoperators

$$\boldsymbol{E}([K * R](i,j)) = E\left(\frac{1}{9}\cdot\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}[R](i-z,j-s)\right) = \frac{1}{9}\cdot\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}E([R](i-z,j-s)) = \frac{1}{9}\cdot\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}0 = \frac{1}{9}\cdot 0 = \mathbf{0}$$

Schritt #3: laut dem **Verschiebungssatz** für diskrete Zufallsvariablen

$$Var([K * R](i,j)) = E\left(([K * R](i,j))^2\right) - \left(E([K * R](i,j))\right)^2 = E\left(([K * R](i,j))^2\right) - 0 = E\left(([K * R](i,j))^2\right) =$$

$$E\left(\left(\frac{1}{9}\cdot\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}[R](i-z,j-s)\right)^2\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot E\left(\left(\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}[R](i-z,j-s)\right)^2\right) =$$

Weil es gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{m\neq n} a_n \cdot a_m$$

[lässt sich zB. durch **Induktionsbeweis** zeigen]

Beispiel für $N = 2$:

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1$$

$$\frac{1}{81}\cdot E\left(\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}([R](i-z,j-s))^2 + \sum_{(i',j')\neq(i'',j'')}[R](i',j')\cdot[R](i'',j'')\right) =$$

$$\frac{1}{81}\cdot\left(E\left(\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}([R](i-z,j-s))^2\right) + E\left(\sum_{(i',j')\neq(i'',j'')}[R](i',j')\cdot[R](i'',j'')\right)\right) =$$

$$\frac{1}{81}\cdot\left(\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}E\left(([R](i-z,j-s))^2\right) + \sum_{(i',j')\neq(i'',j'')}E([R](i',j')\cdot[R](i'',j''))\right) =$$

Erwartungswert des Produkts von **stochastisch unabhängigen** Zufallsvariablen

$$\frac{1}{81}\cdot\left(\sum_{z=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}E\left(\left([R](i-z,j-s) - \boldsymbol{E}([R](i-z,j-s))\right)^2\right) + \sum_{(i',j')\neq(i'',j'')}E([R](i',j'))\cdot E([R](i'',j''))\right) = \frac{1}{81}\cdot\left(3\cdot 3\cdot Var([R](i-z,j-s)) + \sum_{(i',j')\neq(i'',j'')}0\cdot 0\right) = \frac{1}{81}\cdot(9\cdot\sigma^2 + 0) = \frac{\sigma^2}{9}$$