Bildanalyse und Bildverstehen		Georg-August-Universität Göttingen **SoSe 20**
Lösungen #4	Prof. Winfried Kurth / Alex Tavkhelidze	

Aufgabenstellungen:	*Übungen_02*	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia17_ub03.pdf
	Übungsblatt_02	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia20_ue02.pdf

Aufgabe U4:

(a) **Schritt #1**: Kommutativität von Faltung [Spielfeld: **Matrizen**]:

Alternative Formulierung: (es ☺) seien $\boldsymbol{M_1}$ und $\boldsymbol{M_2}$ zwei beliebigen Matrizen. Man beweise, dass $M_1 * M_2 = M_2 * M_1$

Beweis: nehmen wir an [**Œ**=Ligatur für „Ohne Einschränkung der Allgemeinheit“], für $i \in \{1,2\}$, $\boldsymbol{M_i}$ hat die Größe $\boldsymbol{z_i}$ x $\boldsymbol{s_i}$

Laut Definition von 2D-Konvolution:

$$C(i,j) := [M_1 * M_2](i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_1(z,s) \cdot M_2(i-z, j-s)$$

wobei $z_1 + z_2 - 1 \geq \boldsymbol{i} \geq 0 \leq \boldsymbol{j} \leq s_1 + s_2 - 1$

keine feste Ausgabegröße?

Fun Fact für Mathe Fans ☺: Beweis ist super **kurz und klar** im 1D stetigen Fall sowie auch für Reihen – checkt’s [← Hausaufgabe]

Lifehack: bei jeder Faltung $M_1 * M_2$ ist die zweite Matrix, M_2, eine *intuitivere* Wahl für zu verarbeitende Bilder [bzw. M_1 - für Kerne], da diese von (i,j) abhängt und sich deshalb für den Faltungskontext besser eignet – rein verfahrensmäßig kann das Bild (sowie der Kern) beliebige Position in $M_1 * M_2$ übernehmen.

Analogie zur Computergrafik: faltende Maske aus ihrem ***Objektraum*** wird in den ***Weltraum*** von zu faltendem stationären Bild gesetzt.

Schritt #2: Kurzentspannung – kleines bisschen von „praktischer Theorie“ ☺:

Beispiel: **Matlab**

Ausgabemodus	Beschreibung	Ausgabegröße
Full *Voll*	alle möglichen Überlappungen von **Bild** [hier: M_2] und **Maske** [aka Kern aka Filter]	$\boldsymbol{z_1 + z_2 - 1}$ x $\boldsymbol{s_1 + s_2 - 1}$
Same as Pic *Gleich wie Bild*	selbsterklärend ☺	$\boldsymbol{z_2}$ x $\boldsymbol{s_2}$
Valid *Gültig*	Maske bleibt innerhalb der Bildgrenzen	$\boldsymbol{\lvert z_2 - z_1 \rvert + 1}$ x $\boldsymbol{\lvert s_2 - s_1 \rvert + 1}$

Hausaufgabe: warum?

Schritt #3: weiter mit dem Beweis

$$\sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_1(z,s) \cdot M_2(i-z, j-s) = \sum_{z=0}^{z_1-1} \sum_{s=0}^{s_1-1} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(z,s) = \sum_{i-z=i}^{i-(z_1-1)} \sum_{j-s=j}^{j-(s_1-1)} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1(z,s) =$$

Warum?

$$\sum_{i-z=i-(z_1-1)}^{i} \sum_{j-s=j-(s_1-1)}^{j} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1\big(i-(i-z), j-(j-s)\big) = \sum_{i-z=0}^{z_2-1} \sum_{j-s=0}^{s_2-1} M_2(i-z, j-s) \cdot M_1\big(i-(i-z), j-(j-s)\big) = [M_2 * M_1](i,j)$$

Warum?

Q.E.D

Bei diesem Schritt wird aber folgendes **vorausgesetzt**: $\boldsymbol{M_1 = 0 = M_2}$ sobald man diese Matrizen verlässt [als **Zero Padding** bekannt]

Alternative Formulierung [„**formaler** Ausdruck“]: $\forall i \in \{1,2\}\ (x \notin [0; z_i - 1] \cap \mathbb{N} \lor y \notin [0; s_i - 1] \cap \mathbb{N} \Longrightarrow \boldsymbol{M_i(x,y) = 0})$

Aufgabe U4:

Schritt #4: warum $\boxed{} \dashrightarrow \boxed{}$ bei Summationsgrenzen?

Die Voraussetzung von **Zero Padding** verursacht (intuitiverweise) folgendes „Schrumpfen" von Summationsgrenzen in der Definition von Faltung:

$$[M_m * M_n](i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{z=0}^{z_m-1} \sum_{s=0}^{s_m-1} M_m(z,s) \cdot M_n(i-z, j-s) = \sum_{z=max\{0;i-(z_n-1)\}}^{min\{z_m-1;i\}} \sum_{s=max\{0;i-(s_n-1)\}}^{min\{s_m-1;i\}} M_m(z,s) \cdot M_n(i-z,j-s)$$

Dieser Schritt lässt sich folgendermaßen ***interpretieren***: da $M_n(i-z,j-s) = 0$ außerhalb von $\begin{cases} 0 \le i-z \le z_n - 1 \\ 0 \le j-s \le s_n - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i-(z_n-1) \le z \le i \\ j-(s_n-1) \le s \le j \end{cases}$ Indizien, werden die ursprünglichen $\begin{cases} 0 \le z \le z_m - 1 \\ 0 \le s \le s_m - 1 \end{cases}$ Summationsgrenzen in die $\begin{cases} max\{0; i-(z_n-1)\} \le z \le min\{z_m-1; i\} \\ max\{0; j-(s_n-1)\} \le s \le min\{s_m-1; j\} \end{cases}$ umgewandelt.

(b)

Schritt #1: Distributivität von Faltung [in Bezug auf die Matrix**addition**]:

Alternative Formulierung: für beliebige Matrizen $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M_1}$ und $\boldsymbol{M_2}$, es gilt:

$$M * (M_1 + M_2) = M * M_1 + M * M_2$$

Implizite ***Voraussetzung***: das Faltungsformat muss fixiert bleiben und die $\boldsymbol{M_i}$ müssen gleiche Größe haben – sonst sind die gar nicht addierbar und nicht vergleichbar ☺

Hausaufgabe: überprüft ob dieser Schritt zulässig ist (für Doppelsummen)

Schritt #2: los mit dem Beweis

$$[M * (M_1 + M_2)](i,j) = \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z,S) \cdot [M_1 + M_2](i-Z, j-S) = \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z,S) \cdot \big(M_1(i-Z,j-S) + M_2(i-Z,j-S)\big) =$$

$$\sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z,S) \cdot M_1(i-Z,j-S) + \sum_{Z=0}^{z-1} \sum_{S=0}^{s-1} M(Z,S) \cdot M_2(i-Z,j-S) = [M * M_1](i,j) + [M * M_2](i,j)$$

Aufgabe U5:

Schritt #1: Lösung der Aufgabe [unerwarteterweise ganz trocken, ohne Vorwort und W-Fragen ☺]

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf der **Maske** – **rechts unten** ⇔ auf dem **Bild** – **links oben** ⟹ **vor Anwendung Maske umpositionieren**

Berechnung der Faltungsmatrix an einer konkreten Stelle	**Bildmatrix** *(in einem Koordinatensystem)* mit dem **Mittelwertfilter drauf**

$$9 \cdot [K * B](3,2) = \boldsymbol{K(0,0) \cdot B(3,2)} + K(0+1,0+1) \cdot B(3-1,2-1) +$$
$$K(0{,}1) \cdot B(3{,}1) + K(1{,}0) \cdot B(2{,}2) +$$
$$K(0{,}2) \cdot B(3{,}0) + K(2{,}0) \cdot B(1{,}2) +$$
$$K(1{,}2) \cdot B(2{,}0) + K(2{,}1) \cdot B(1{,}1) +$$
$$K(2{,}2) \cdot B(1{,}0) =$$

$$1 \cdot B(3{,}2) + 1 \cdot B(2{,}1) +$$
$$1 \cdot B(3{,}1) + 1 \cdot B(2{,}2) +$$
$$1 \cdot B(3{,}0) + 1 \cdot B(1{,}2) +$$
$$1 \cdot B(2{,}0) + 1 \cdot B(1{,}1) +$$
$$1 \cdot B(1{,}0) =$$

$$1 + 0 +$$
$$0 + 1 +$$
$$0 + 0 +$$
$$0 + 0 +$$
$$0 =$$

übersichtlicher umgruppiert

$$0 + 0 + 0 +$$
$$0 + 0 + 1 +$$
$$0 + 0 + 1 =$$
$$2$$

Z\S	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

Von daher: $[K * B](3,2) = \frac{2}{9}$

Hausaufgabe: rechnet andere Stellen [im „**Valid**" Faltungsmodus] selber aus

Randbemerkung zur *Umpositionierung der Faltungsmaske*:

2D-**Rot**ationen und 2D-**Sp**iegelungen [**um** den Koordinaten**ursprung**] bilden eine Gruppe mit folgenden unkompliziert beweisbaren Eigenschaften:

$$Sp(\leftrightarrow) \cdot Sp(\updownarrow) = Rot(\pi) = Rot(-\pi) = Sp(\updownarrow) \cdot Sp(\leftrightarrow) \quad \textbf{und} \quad Sp(\nearrow) \cdot Sp(\nwarrow) = Rot(\pi) = Rot(-\pi) = Sp(\nwarrow) \cdot Sp(\nearrow)$$

Diese Eigenschaften bieten diverse Möglichkeiten (siehe 6 davon in der obigen Zeile) um eine **Faltungsmaske** vor dem „Gleiten" ***korrekt zu positionieren***.

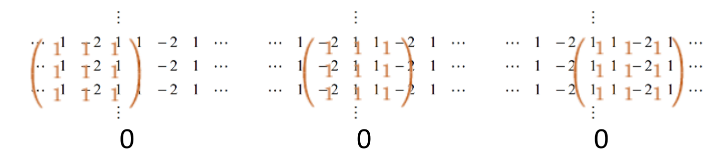
Aufgabe U5:

(b)

In gleicher Weise wie oben:

$$K * Geräusch\ \#1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{matrix} & & & & \vdots & & & & \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ & & & & \vdots & & & & \end{matrix} = \begin{matrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}, \text{ weil}$$

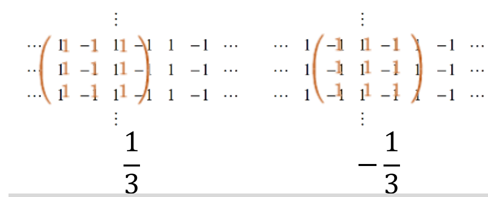
alle Überlappungsmöglichkeiten



Faltungswerte [hier: 9er-Mittelwerte]

$$K * Geräusch\ \#2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{matrix} & & & & \vdots & & & & \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ & & & & \vdots & & & & \end{matrix} = \begin{matrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{-\frac{1}{3}} & \mathbf{\frac{1}{3}} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{-\frac{1}{3}} & \mathbf{\frac{1}{3}} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{-\frac{1}{3}} & \mathbf{\frac{1}{3}} & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}, \text{ weil}$$

alle Überlappungsmöglichkeiten



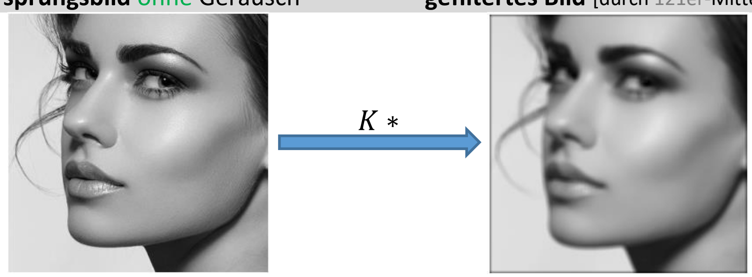
Faltungswerte [hier: 9er-Mittelwerte]

Eignung als Tiefpassfilter [aka **LPF** aka **Glättungsfilter**]:

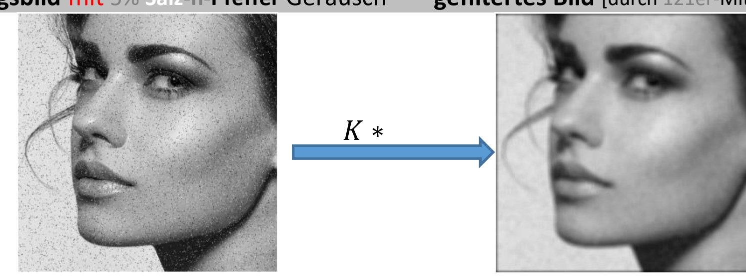
- Geräusch #1 wird komplett entfernt – *„best ever"* **low-pass filter** ☺
- Geräusch #2 wird gedrittelt, also deutlich vermindert – „so lala" **Tiefpassfilter** ☺

Beispiele:

Ursprungsbild ohne Geräusch — **gefiltertes Bild** [durch 121er-Mittelwert]



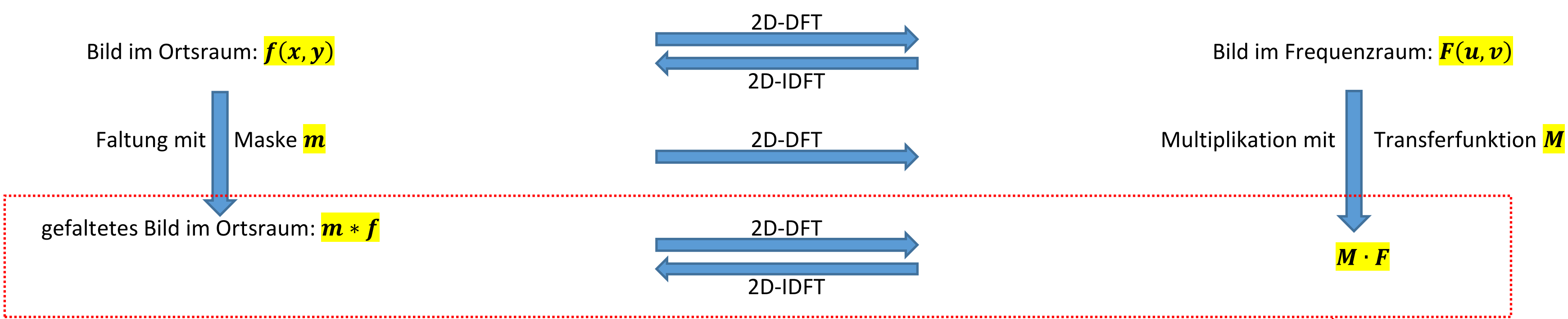
Ursprungsbild mit 5% Salz-n-**Pfeffer** Geräusch — **gefiltertes Bild** [durch 121er-Mittelwert]



Aufgabe U5:

Schritt #2: kurzes Schlusswort zum Thema „Faltung“

(a) **DFT ⇋ Faltung** – diagrammatische Veranschaulichung:



(b) **Warum** muss die Faltungsmaske (vor der tatsächlichen **Anwendung**, d.h. vor dem **„Gleiten“ übers Bild**) gespiegelt werden? – Sonst scheitert der Übergang:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s(t+x)} g(t)\,dt\right) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s u} g(\boxed{u-x})\,du\right) f(x)\,dx$$

Im Prinzip… Alles ist möglich ☺:

- **Faltung**:

$$C(i,j) = [K * B](i,j) = \sum_{z=0}^{z_K-1}\sum_{s=0}^{s_K-1} K(z,s)\cdot B(i-z,j-s)$$

- **Kreuzkorrelation**:

$$CC(i,j) = [K \otimes B](i,j) = \sum_{z=0}^{z_K-1}\sum_{s=0}^{s_K-1} K(z,s)\cdot B(i+z,j+s)$$

Alles hat aber seinen Zweck… und diese sind nicht zu verwechseln

Hausaufgabe: checkt ob Kreuzkorrelation kommutativ ist