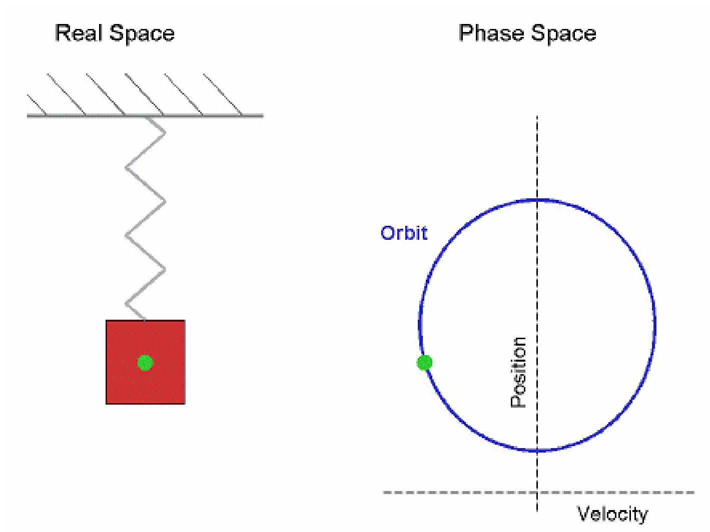
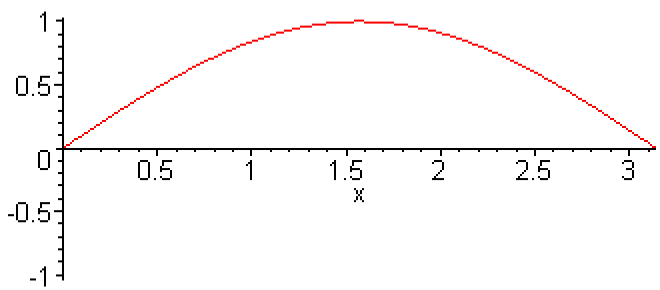
Aufgabenstellungen:		
	Übungen_02	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia17_ub03.pdf
	Übungsblatt_02	http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/bia20_ue02.pdf

Aufgabe U3:

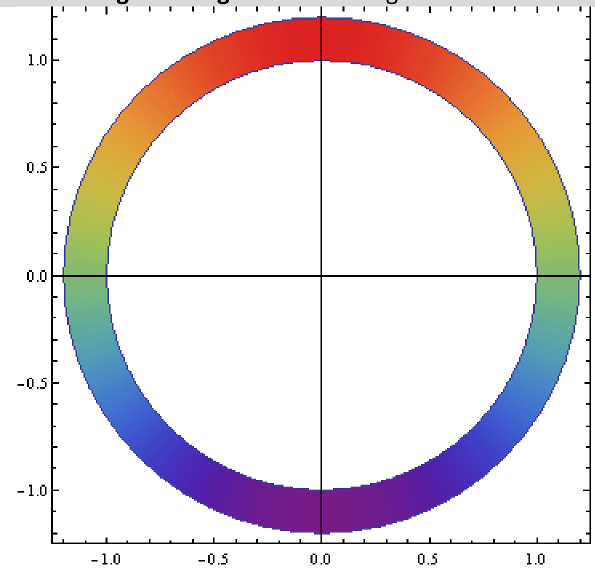
Schritt #1: Fouriertransformation – ein wenig „Etymologie/Evolution"

Harmonische Schwingungen: Federpendel, Saitenschwingung





Fouriersche Fragestellung: Wärmeleitung innerhalb eines Drahtes



PDE: $\boxed{\frac{\partial y}{\partial t} = \boldsymbol{Drahtmaterial} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}}$

Fourier-Reihe: $y(\theta, t) = \sum_n c_n(t) \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot\theta}$

ODE: $c_n'(t) = -2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot c_n(t)$

Fourierkoeffizienten in der linearen Dekomposition der ursprünglichen Wärmeverteilungsfunktion über **basische Funktionen** (**hier**: komplexe Exponenten $e^{2\pi i n x}$):
$\boldsymbol{y(\theta, 0) = \sum_n K_n \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot\theta}}$, wobei $\boldsymbol{K_n = \int_0^{2\pi} y(\theta, 0) \cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot\theta} d\theta}$

(analytische) Lösung

$$\boldsymbol{y(t) = K \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}$$

$\boldsymbol{K}$ – Amplitude **(Länge)**	$\boldsymbol{\omega}$ – **(Kreis)**Frequenz
$\boldsymbol{\varphi}$ – Anfangsphase **(Winkelposition)**	$\boldsymbol{t}$ – Zeitpunkt

Gilt für periodische Funktionen $y(\cdot)$

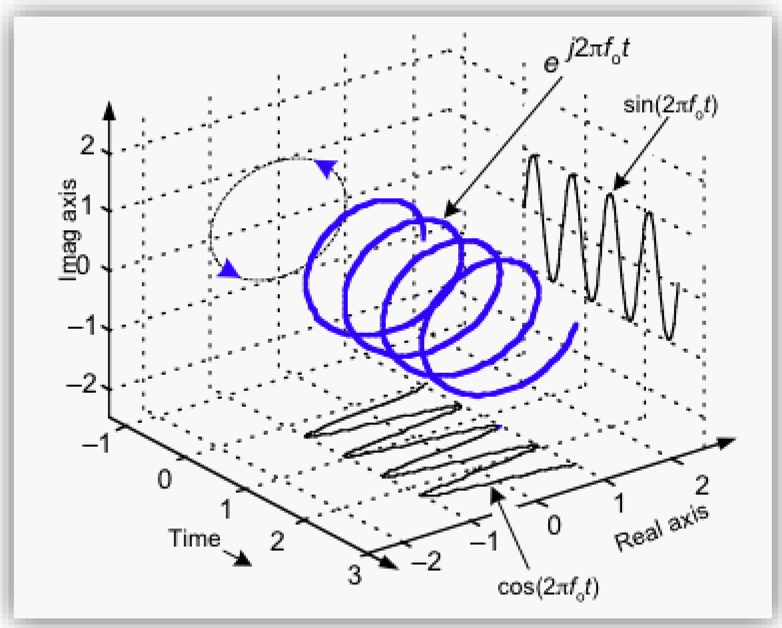
$$\boldsymbol{y(\theta, t) = \sum_n K_n \cdot e^{-2\cdot\pi^2\cdot n^2\cdot t} \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot\theta}}$$

Aufgabe U3:

Schritt #2: **[Randbemerkung]** **komplexe Exponenten** bilden eine Orthonormalbasis:

im Hilbertraum $\mathcal{L}^2([0;2\pi])$ der quadratintegrierbaren Funktionen	im $\mathcal{L}^1(G)$ für jede kompakte kommutative Gruppe G

Abbildung mit Projektionen



Formeln

Eulersche Formel:	$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$
$\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sin\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$	$\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2 \cdot i}$
komplexe Exponenten $[n \in \mathbb{N}]$:	$e_n(t) = e^{2\pi i n t}$
inneres Produkt (ist eine zweistellige Operation) von komplexen Exponenten:	$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \int_0^{2\pi} e^{2\pi i n t} \cdot e^{-2\pi i m t}\, dt$
Orthonormalität von $\{e_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$:	$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \begin{cases} 1 & falls\ n = m \\ 0 & sonst \end{cases}$

Platz für Werbung ☺

Schritt #3: zweidimensionale (aka **2D**) **D**iskrete **Fourier****T**ransformation eines Bildes $\{f(z,s)\}_{z=0..Z-1;\, s=0..S-1}$ der Größe ZxS

Normalerweise, von der gleichen Größe ZxS:

$u = 0..Z-1$	$v = 0..S-1$

$$F(u,v) = Konstante \cdot \sum_{z=0}^{Z-1} \sum_{s=0}^{S-1} f(z,s) \cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{z\cdot u}{Z} + \frac{s\cdot v}{S}\right)} = K \cdot \sum_{z=0}^{Z-1} \left(\sum_{s=0}^{S-1} f(z,s) \cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{s\cdot v}{S}\right)} \right) \cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{z\cdot u}{Z}\right)}$$

normalisiert

	bei 2D-DFT	bei **Rücktransformation** aka DFT^{-1} aka **2D-IDFT**
$Konstante =$	$\dfrac{1}{\sqrt{Z \cdot S}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{Z \cdot S}}$
	$\dfrac{1}{Z \cdot S}$	1
	1	$\dfrac{1}{Z \cdot S}$

schaut nach **zwei** verschachtelten 1D-DFTs aus…

Grundidee für 2D-FFT [„schnelle“ 2D-DFT Berechnung]

<u>Aufgabe U3</u>:

Schritt #3: <u>Annäherung von periodischen Funktionen</u> durch **Fourier-Reihen** – einfaches 1D-Beispiel im Blickfeld

- etwas Mathe als Vorspeise ☺:

periodische Funktion $f(x)$, mit der Periodenlänge T [Frequenz **F**= $\mathbf{1/T}$]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cdot \cos(2\pi F x) + b_n \cdot \sin(2\pi F x))$$

DC-Komponente [aka Nullfrequenz]

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx$$

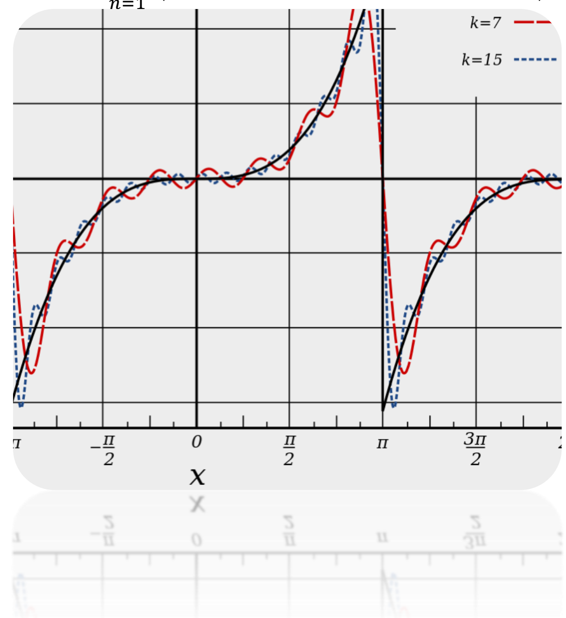
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(2\pi F x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(2\pi F x)\,dx$$

Quelle: Wikibooks

$\boldsymbol{f(x) = x^3}$

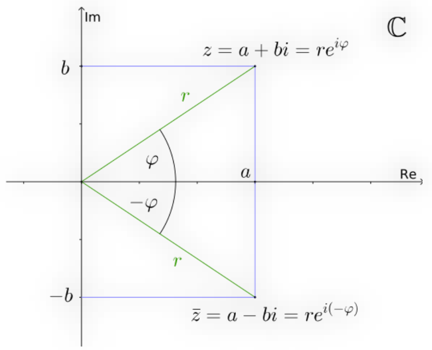
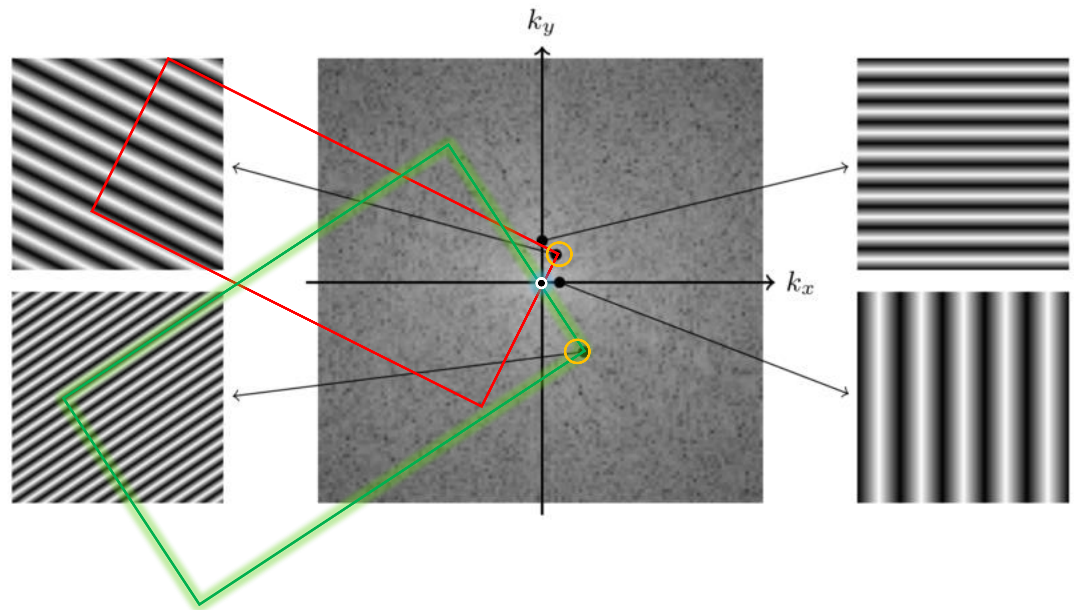
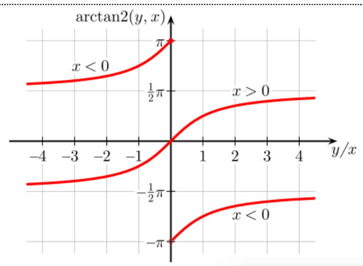
$$f(x) = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{-2(-1)^n}{n^3}\cdot(\pi^2\cdot n^2 - 6)\cdot\sin(nx)\right)$$



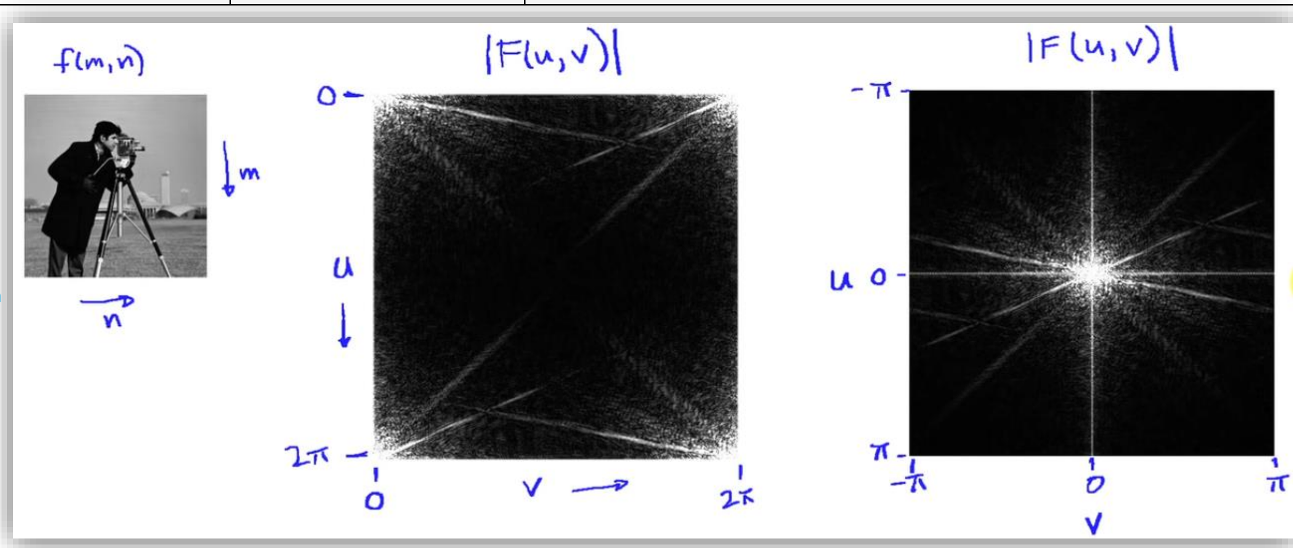
Aufgabe U3:

Schritt #3: berühmtes Kameramann-Bild – **2D-DFT Cheatsheet**

Quelle: Wiki

Darstellungskanäle einer komplexen Zahl $z = x + i \cdot y = re^{i\varphi}$		Bausteine der 2D-DFT-Analyse – **2D Sinusoide im Frequenzraum**
	**Realer Anteil:** $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{x} = \mathrm{r} \cdot \cos(\varphi)$	
	Imaginärer Anteil: $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{y} = \mathrm{r} \cdot \sin(\varphi)$	
	Betrag: $\mathrm{r} = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	
	**Phase:** $\varphi = \arctan2(\mathrm{y}, \mathrm{x})$	

Quelle: Van Veen



Aufgabe U3:

Schritt #4: Lösung der Aufgabe

(a) Schritt #1: **Basismatrizen** aus unserer Formel für 2D-DFT

$$\boldsymbol{F(u,v)} = \boldsymbol{Konstante} \cdot \sum_{z=0}^{Z-1}\sum_{s=0}^{S-1} \boldsymbol{f(z,s)} \cdot \boldsymbol{e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{z\cdot u}{Z}+\frac{s\cdot v}{S}\right)}} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\boldsymbol{B_{z,s}}: B_{z,s} = \{\boldsymbol{B_{z,s}(u,v)}\}_{\substack{u=0..Z-1\\ v=0..S-1}} = \left\{e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{z\cdot u}{Z}+\frac{s\cdot v}{S}\right)}\right\}_{\substack{u=0..Z-1\\ v=0..S-1}}\right\}_{\substack{z=0..Z-1\\ s=0..S-1}}$$

Schritt #2: für unser Beispiel, $\boldsymbol{z, s} \in \{\boldsymbol{0,1}\}$ - von daher, die Basis besteht aus $|\{0,1\}|^2 = \boldsymbol{4}$ Matrizen $\{\boldsymbol{B_{0,0}}, \boldsymbol{B_{0,1}}, \boldsymbol{B_{1,0}}, \boldsymbol{B_{1,1}}\}$, wobei:

$$\boldsymbol{B_{0,0}} = \left\{e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{0\cdot u}{Z}+\frac{0\cdot v}{S}\right)}\right\}_{\substack{u=0,1\\ v=0,1}} = \begin{bmatrix} e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{0\cdot 0}{Z}+\frac{0\cdot 0}{S}\right)} & e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{0\cdot 0}{Z}+\frac{0\cdot 1}{S}\right)} \\ e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{0\cdot 1}{Z}+\frac{0\cdot 0}{S}\right)} & e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{0\cdot 1}{Z}+\frac{0\cdot 1}{S}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot 0} & e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot 0} \\ e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot 0} & e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 \\ e^0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B_{0,1}} = \cdots$ | $\boldsymbol{B_{1,0}} = \cdots$ | $\boldsymbol{B_{1,1}} = \cdots$
rechnet selber aus ☺

Hausaufgabe für Mathe-Fans ☺: **warum $\boldsymbol{e^0 = 1}$?**

(b) Schritt #1: zu zeigen ist

$$\frac{1}{\sqrt{Z\cdot S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z\cdot S}} \cdot \sum_{u=0}^{1}\sum_{v=0}^{1} B_{z_1,s_1}(u,v) \cdot \overline{B_{z_2,s_2}(u,v)} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{B_{z_1,s_1}}; \boldsymbol{B_{z_2,s_2}} \rangle = \begin{cases} \boldsymbol{1} & falls\ (z_1,s_1) = (z_2,s_2) \\ \boldsymbol{0} & sonst \end{cases}$$

Schritt #2: na dann los ☺ [**alternativer Lösungsweg**: da es insgesamt nur 4 Matrizen gibt, man könnte die Ergebnisse für alle möglichen Paare explizit ausrechnen]

$$\frac{1}{\sqrt{Z\cdot S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z\cdot S}} \cdot \sum_{u=0}^{Z-1}\sum_{v=0}^{S-1} B_{z_1,s_1}(u,v) \cdot \overline{B_{z_2,s_2}(u,v)} = \frac{1}{Z\cdot S} \cdot \sum_{u=0}^{Z-1}\sum_{v=0}^{S-1} e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{z_1\cdot u}{Z}+\frac{s_1\cdot v}{S}\right)} \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{z_2\cdot u}{Z}+\frac{s_2\cdot v}{S}\right)} = \frac{1}{Z\cdot S} \cdot \sum_{u=0}^{Z-1}\sum_{v=0}^{S-1} e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot\left(\frac{(z_2-z_1)\cdot u}{Z}+\frac{(s_2-s_1)\cdot v}{S}\right)} =$$

Hausaufgabe für Mathe-Fans ☺: für $z \in \mathbb{C}$ und anhand $\boldsymbol{e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}$, beweist $\boldsymbol{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}}$

Hausaufgabe: warum?

$$\frac{1}{Z\cdot S} \cdot \sum_{u=0}^{S-1} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}\cdot u} \cdot \sum_{v=0}^{S-1} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}\cdot v} = \begin{cases} \boldsymbol{1} & falls\ (z_1,s_1) = (z_2,s_2) \\ \frac{1}{Z\cdot S} \cdot \frac{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}\cdot Z} - 1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}} - 1} \cdot \frac{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}\cdot S} - 1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}} - 1} & sonst \\ \frac{1}{Z} \cdot \frac{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}\cdot Z} - 1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}} - 1} & falls\ z_1 \neq z_2 \wedge s_1 = s_2 \\ \frac{1}{S} \cdot \frac{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}\cdot S} - 1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}} - 1} & falls\ s_1 \neq s_2 \wedge z_1 = z_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{Z\cdot S} \cdot \frac{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}\cdot Z} - 1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}} - 1} \cdot \frac{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}\cdot S} - 1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}} - 1} = \frac{1}{Z\cdot S} \cdot \frac{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)} - 1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}} - 1} \cdot \frac{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)} - 1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}} - 1} = \frac{1}{Z\cdot S} \cdot \frac{1-1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(z_2-z_1)}{Z}} - 1} \cdot \frac{1-1}{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(s_2-s_1)}{S}} - 1} = \frac{1}{Z\cdot S} \cdot 0 \cdot 0 = \boldsymbol{0}$$

Tipp zu ⬭: Summenformel für geometrische Reihen...

<u>Aufgabe U3</u>:

(c) Schritt #1: unsere Bildmatrix

$$(f_{jk}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Schritt #2: die DFT-Bildmatrix elementweise berechnen

$$DFT\,(f_{jk}) = (g_{mn}) = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{bmatrix}:$$

$$\boxed{g_{mn} = \frac{1}{2\cdot 2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_{jk}\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{j}{2}\cdot m+\frac{k}{2}\cdot n\right)} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_{jk}\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{j}{2}\cdot m+\frac{k}{2}\cdot n\right)}}$$

$$g_{00} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_{jk}\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{j}{2}\cdot 0+\frac{k}{2}\cdot 0\right)} = \frac{1}{4}\cdot\left(1\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{0}{2}\cdot 0+\frac{0}{2}\cdot 0\right)} + 2\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{0}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right)} + 3\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{0}{2}\cdot 0\right)} + 4\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right)}\right) = \frac{1}{4}\cdot(1+2+3+4) = 2.5$$

$$g_{01} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_{jk}\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{j}{2}\cdot 0+\frac{k}{2}\cdot 1\right)} = \cdots = -0.5$$

$$g_{10} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_{jk}\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{j}{2}\cdot 1+\frac{k}{2}\cdot 0\right)} = \cdots = -1$$

$$g_{11} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} f_{jk}\cdot e^{-2\pi i\cdot\left(\frac{j}{2}\cdot 1+\frac{k}{2}\cdot 1\right)} = \cdots = 0$$

Also:

$$(g_{mn}) = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Randbemerkung:

Normalerweise, bei größeren Bildern, man kriegt eine überwiegend komplexwertige Fourier-Bildmatrix $(g_{mn}) = \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{bmatrix}$ - diese lässt sich in 4 verschiedenen (reellwertigen="beobachtbaren") Frequenzräumen beobachten:

Realteil	$Re(g_{mn}) = \begin{bmatrix} a & c \\ e & g \end{bmatrix}$	**Betrag**	$\lvert(g_{mn})\rvert = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & \sqrt{c^2+d^2} \\ \sqrt{e^2+f^2} & \sqrt{g^2+h^2} \end{bmatrix}$
Imaginärteil	$Im(g_{mn}) = \begin{bmatrix} b & d \\ f & h \end{bmatrix}$	**Phase**	$\varphi(g_{mn}) = \begin{bmatrix} arctan2(b,a) & arctan2(d,c) \\ arctan2(f,e) & arctan2(h,g) \end{bmatrix}$

Aufgabe 4:

Schritt #1: Einträge der DFT-Bildmatrix berechnen [fürs Ursprungsbild $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{jk}})$]:

$$DFT(B) = (g_{mn})$$

$$g_{mn} = \frac{1}{L \cdot R} \cdot \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{R-1} b_{jk} \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R}\right)}$$

Schritt #2: Einträge der DFT-Bildmatrix berechnen [fürs modifizierte Bild $\widehat{\boldsymbol{B}} = \left((-\mathbf{1})^{j+k} \cdot \boldsymbol{b_{jk}}\right)$]:

$$DFT(\widehat{B}) = (\widehat{g_{mn}})$$

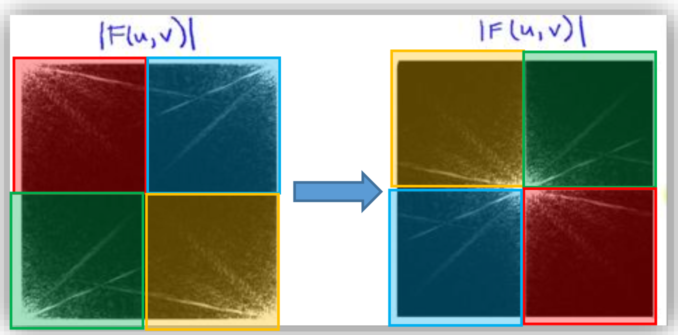
$$\widehat{g_{mn}} = \frac{1}{L \cdot R} \cdot \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{R-1} (-1)^{j+k} \cdot b_{jk} \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R}\right)} = \frac{1}{L \cdot R} \cdot \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{R-1} b_{jk} \cdot e^{\pm \pi i (j+k)} \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R}\right)} =$$

$$\frac{1}{L \cdot R} \cdot \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{R-1} b_{jk} \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{mj}{L} + \frac{nk}{R} \pm \frac{j+k}{2}\right)} = \frac{1}{L \cdot R} \cdot \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{R-1} b_{jk} \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{\left(m \pm \frac{L}{2}\right) j}{L} + \frac{\left(n \pm \frac{R}{2}\right) k}{R}\right)} = g_{m \pm \frac{L}{2}, n \pm \frac{R}{2}}$$

Randbemerkung: praktische Anwendung dieser schachbrettartigen Umkehrung **im zyklisch wiederholten Format**

Eckpunkte im Frequenzraum der fouriertransformierten Bildmatrix $\boldsymbol{B}$		**Entsprechende Punkte im Frequenzraum** des schachbrettmodifizierten Bildes $\widehat{\boldsymbol{B}}$	
oben links	$g_{0,0}$	$\widehat{g_{\frac{L}{2},\frac{R}{2}}}$	**unten rechts** von der Mitte
oben rechts	$g_{0,R-1}$	$\widehat{g_{\frac{L}{2},\frac{R}{2}-1}}$	**unten links** von der Mitte
unten links	$g_{L-1,0}$	$\widehat{g_{\frac{L}{2}-1,\frac{R}{2}}}$	**oben rechts** von der Mitte
unten rechts	$g_{L-1,R-1}$	$\widehat{g_{\frac{L}{2}-1,\frac{R}{2}-1}}$	**oben links** von der Mitte

geringere Frequenzen [Indikatoren für kontrastarme Kanten im Bild] haben sich an der **Mitte** angehäuft



höhere Frequenzen [Indikatoren für kontrastreiche Kanten im Bild] haben sich an **Rändern** angehäuft