Bildanalyse und Bildverstehen

Aufgabe U6

Die Bildmatrix B setze sich additiv aus einem Originalbild B_0 und einem Rauschanteil R zusammen, wobei letzterer als Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 definiert sei: $B = B_0 + R$, $E(R) = 0$, $Var(R) = \sigma^2$. Die Rauschanteile r_{ij} in den einzelnen Positionen i,j seien paarweise stochastisch unabhängig. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $K*B - K*B_0$, wenn K der Mittelwertfilter aus Aufg. U5 ist?

Aufgabe U7

Günstigere Eigenschaften als der Mittelwertfilter hat der *Binomialfilter*. 1-dimensionale Form: $B_n = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0,\ldots,n}$, 2-dim. Form: $B_m^T \cdot B_n$ (Matrixprodukt). Man berechne den Binomialfilter $B_2^T \cdot B_3$ und wende ihn auf die beiden periodischen Muster aus Aufgabe U5(b) an.

Aufgabe U8

Gegeben sei die eindimensionale Faltungsmaske

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) Man zeige: Es gibt keine faltungsinverse Maske G der Länge 7, für die also $F*G = I = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$ (= Einheitsfilter) erfüllt ist.

(b) Man bestimme eine Faltungsmaske F^+ der Länge 7, die die Summe der Abweichungsquadrate zwischen $F*F^+$ und I minimiert ("Pseudoinverse zu F").

Aufgabe U9

Die folgende pgm-Datei definiert einen "Graukeil":

```
P2
6 6 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5
```

Man wende hierauf die folgenden Faltungsmasken an
(zentriert auf die Mitte der Maske, Matrixeinträge jenseits des Randes als 0 angenommen):

(a) Die beiden Komponenten des Sobel-Operators:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(b) die Laplace-Maske $h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Man approximiere mittels (a) Betrag und Richtung des Gradienten in jedem inneren Bildpunkt.

Aufgabe U10

Die partielle Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f(x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

kann im diskreten Fall durch $f(x+1, y) - f(x,y)$ oder durch $f(x, y) - f(x-1, y)$ approximiert werden. Man verifiziere damit die in der Vorlesung gegebene Maske $h_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ für die diskrete Version des Laplace-Operators $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.