

Bildanalyse und Bildverstehen

Aufgabe U4

- (a) Wie lauten die Basismatrizen der diskreten Fouriertransformation im Falle $L = R = 2$, also für 2×2 -Matrizen?
(b) Man zeige, dass diese 4 Matrizen tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden.
(c) Wie lautet die Fouriertransformierte der folgenden Matrix:

$$(f_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ?$$

Die Faltung

Gegeben seien eine Bildmatrix B und eine $L \times R$ -Matrix K ("Kern"). Die Faltung ist eine Verknüpfung $*$, definiert als

$$K * B = A = (a_{jk})$$

mit

$$a_{jk} = \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{R-1} k_{mn} \cdot b_{j-m, k-n},$$

wobei A das Format der Bildmatrix B hat.

Alternative Möglichkeiten der Randbehandlung:

- Elemente mit negativem Index = 0 setzen, oder
- Bildmatrix B in beide Richtungen zyklisch wiederholen.

Beispiel (mit Null-Rand):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontinuierliches Analogon (für Funktionen):

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) g(x - s, y - t) ds dt.$$

Aufgabe U5

Man beweise, dass für die Faltung von Matrizen das Kommutativ- und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe U6

(a) Man falte die folgende Matrix mit dem Kern $K = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(Mittelwert-Filter):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Man wende den Mittelwertfilter aus Teil (a) auf folgende periodische Strukturen an:

$$\begin{array}{cccccccc} & & \vdots & & & & \vdots & \\ \dots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ & & \vdots & & & & \vdots & \end{array}$$

Man diskutiere an diesen Beispielen die Eignung als Tiefpassfilter.

Aufgabe U7

Die Bildmatrix B setze sich additiv aus einem Originalbild B_0 und einem Rauschanteil R zusammen, wobei letzterer als Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 definiert sei: $B = B_0 + R$, $E(R) = 0$, $\text{Var}(R) = \sigma^2$. Die Rauschanteile r_{ij} in den einzelnen Positionen i, j seien paarweise stochastisch unabhängig. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $K^*B - K^*B_0$, wenn K der Mittelwertfilter aus Aufg. U6 ist?

Aufgabe U8

Günstigere Eigenschaften als der Mittelwertfilter hat der

Binomialfilter. 1-dimensionale Form: $B_n = \frac{1}{2^n} \left(\binom{n}{k} \right)_{k=0, \dots, n}$, 2-dim.

Form: $B_m^T \cdot B_n$ (Matrixprodukt). Man berechne den Binomialfilter $B_2^T \cdot B_3$ und wende ihn auf die beiden periodischen Muster aus Aufgabe U6(b) an.