

12. Flächenrekonstruktion aus 3D-Punktwolken und generalisierte Voronoi-Diagramme

(Einfache) Voronoi-Diagramme:

Motivation:

gegeben: Raum R , darin Menge S von Objekten
Frage nach Zerlegung von R in "Einflusszonen" der Objekte aus S

für jedes Objekt p aus S bilde Region aus denjenigen Punkten aus R , für die der von p ausgeübte Einfluss am größten (unter allen Objekten aus S) ist:

Voronoi-Region von p

Allgemeinheit: "Raum", "Objekt", "Einfluss" sind variabel
⇒ Ansatz wurde in verschiedenen Fachgebieten "wiederentdeckt" (unter verschiedenen Namen)

Voronoi-Diagramm

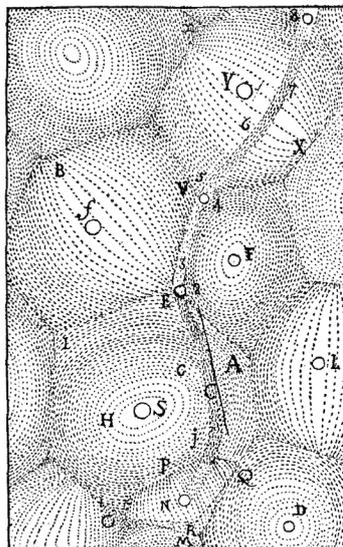
= *Dirichlet-Zerlegung*

= Zerlegung in *Thiessen-Polygone*

in der algorithmischen Geometrie: Shamos & Hoey 1975

früher Vorläufer:

Modellvorstellung kosmischer Materie-Wirbel bei Descartes 1644.



(aus Klein 1997)

Wir betrachten zunächst den zweidimensionalen Fall.

Definition:

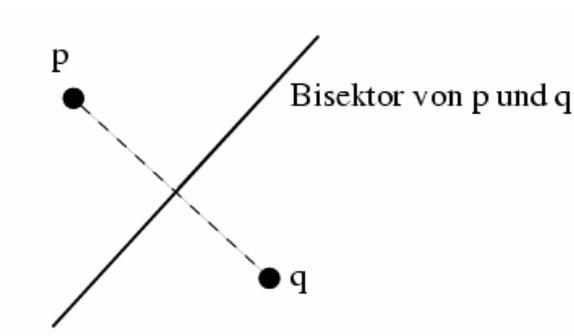
gegeben: Menge S von n Punkten p_1, \dots, p_n in der Ebene \mathbb{R}^2

verwendete Metrik: L_2 -Norm (euklidischer Abstand)

Bisektor zweier Punkte p, q :

$$B(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |\overline{px}| = |\overline{qx}|\}$$

(für Punkte p, q stets Mittelsenkrechte von \overline{pq})



zerlegt \mathbb{R}^2 in zwei Halbebenen:

$$D(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |\overline{px}| < |\overline{qx}|\}$$

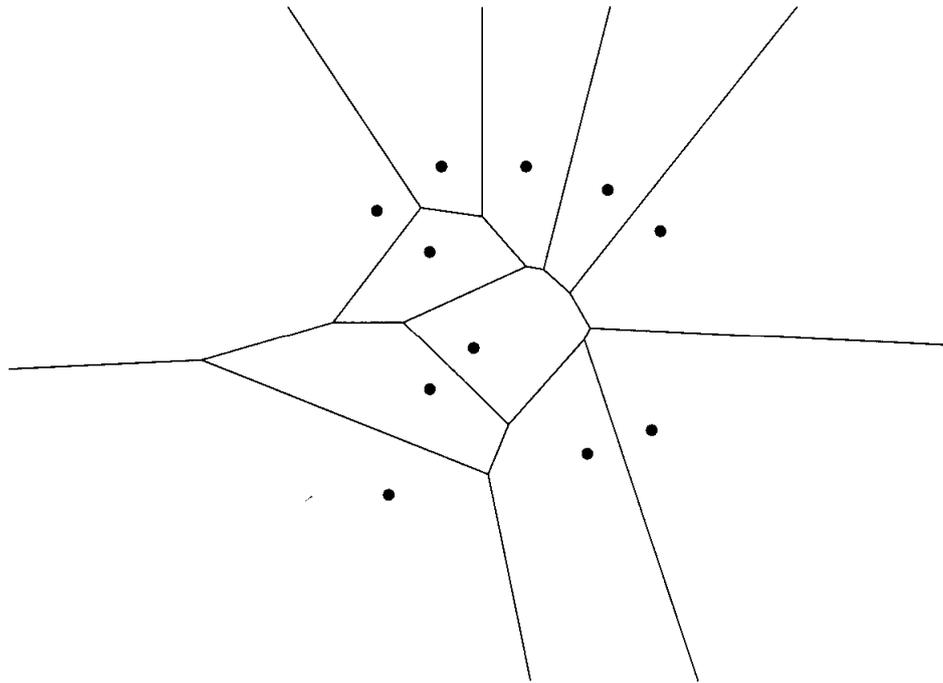
$$D(q, p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |\overline{px}| > |\overline{qx}|\}$$

Klar: $p \in D(p, q)$, $q \in D(q, p)$.

Voronoi-Region von p bezüglich S :

$$VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$$

- Durchschnitt von $n - 1$ offenen Halbebenen
- offen, konvex, aber nicht notwendig beschränkt
- Menge aller Punkte im \mathbb{R}^2 , zu denen p näher ist als irgendein anderer Punkt $q \in S$



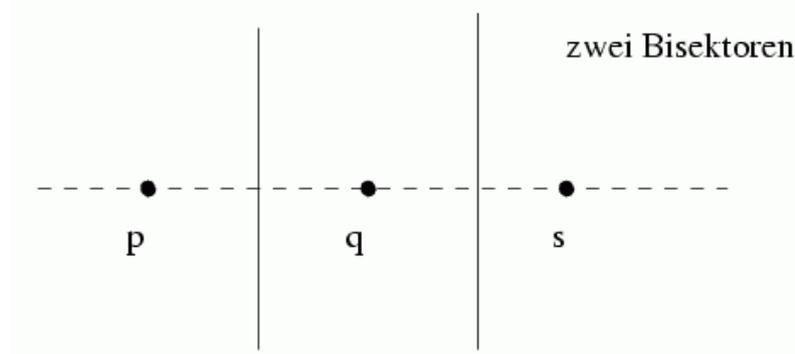
Voronoi-Knoten: Punkte v in \mathbb{R}^2 , die zu *mehr* als zwei Punkten aus S minimalen Abstand haben

Voronoi-Kante: gemeinsamer Rand zweier Voronoi-Regionen, falls aus mehr als einem Punkt bestehend (Endpunkte sind Voronoi-Knoten)

Voronoi-Diagramm $VD(S)$:

Graph aus Voronoi-Knoten und Voronoi-Kanten

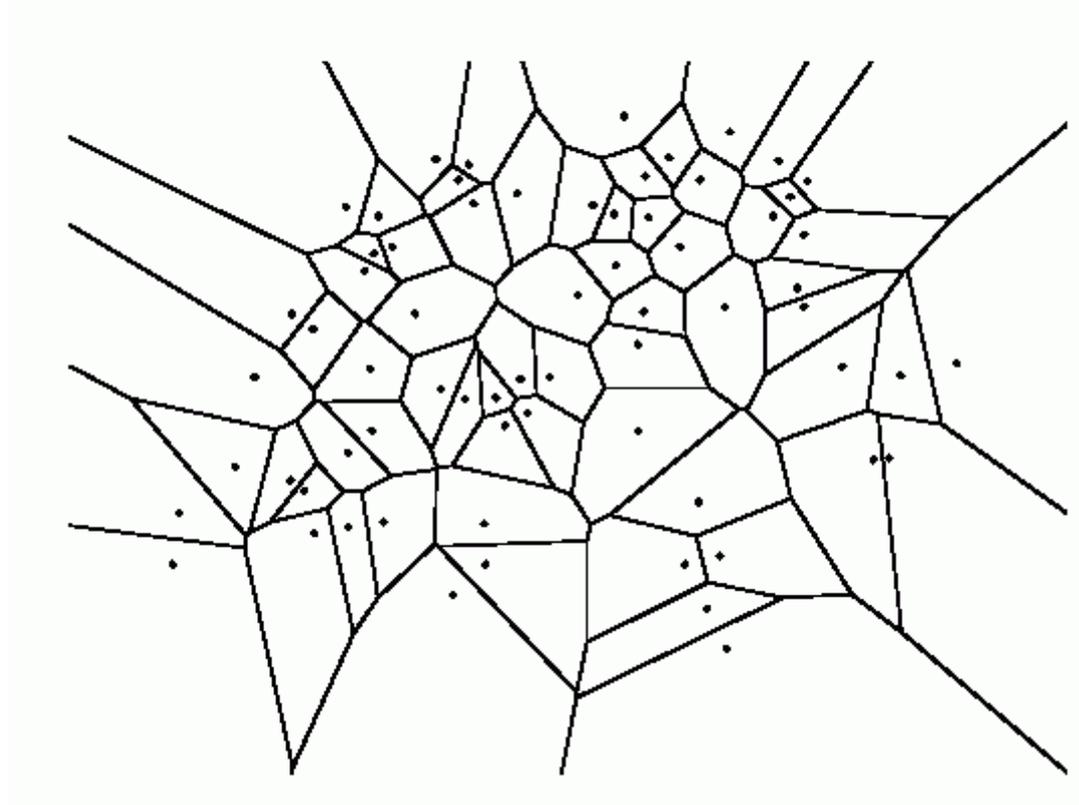
Das Voronoi-Diagramm ist im allgemeinen zusammenhängend
 – Ausnahme: Menge kollinearier Punkte, z.B.



Die Voronoi-Knoten haben im allgemeinen den Grad 3.
Ausnahme: 4 der Punkte auf S liegen auf einem
gemeinsamen Kreis \Rightarrow die zugehörigen VR treffen sich
in einem gemeinsamen Knoten mit Grad ≥ 4 .

Voronoi-Diagramm löst Problem der "Einflusszonen" für
Objekte = Punkte in der Ebene, Einfluss proportional
zum euklidischen Abstand.

Beispiel: Einzugsbereiche der Schweizer Städte



(aus Hinrichs 2001)

Gedankenexperiment:

Betr. von bel. $x \in \mathbb{R}^2$ sich ausbreitenden Kreis $C(x)$ mit Zentrum x

Lemma:

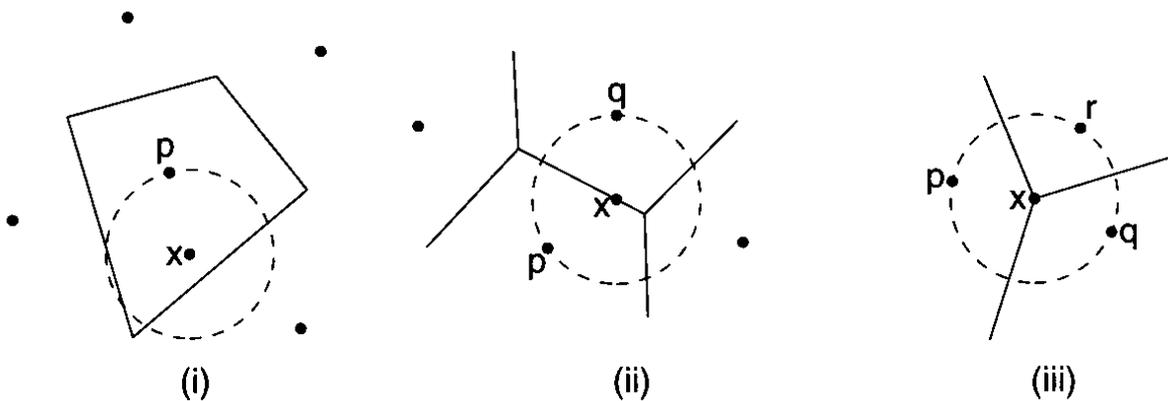
$C(x)$ trifft als ersten von S auf $p \Leftrightarrow x \in VR(p)$

$C(x)$ trifft als erste von S gleichzeitig p, q

$\Leftrightarrow x$ liegt auf der Voronoi-Kante zwischen $VR(p, S)$ und $VR(q, S)$

$C(x)$ trifft als erste von S gleichzeitig $p_1, p_2, \dots, p_k, k \geq 3$

$\Leftrightarrow x$ ist Voronoi-Knoten, an den die $VR(p_i, S)$ grenzen, $i = 1, \dots, k$.



Beweis: siehe Klein 1997, Keßler 1998.

Eigenschaften des Voronoi-Diagramms einer Menge S von Punkten in der Ebene:

Satz: Für $|S| = n$ hat das Voronoidiagramm $O(n)$ Voronoi-Knoten und $O(n)$ Voronoi-Kanten.

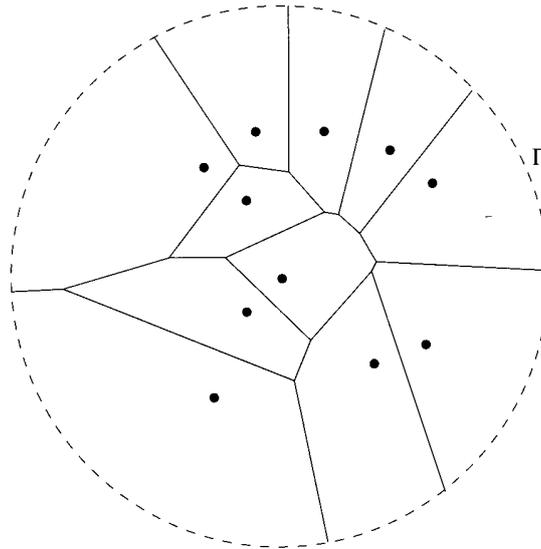
Beweis:

betr. beschränktes Voronoi-Diagramm $VD_0(S)$:

Hinzufügen eines einfachen geschlossenen Weges Γ um S ,

so daß Γ nur unbeschränkte Voronoi-Kanten kreuzt

\rightarrow unbeschränkte Voronoi-Regionen werden durch Γ beschränkt



$VD_0(S)$ zusammenhängend

→ Eulerformel anwendbar: $N + F = E + 2$ (Induktion),

wobei # Flächen $F = n + 1$.

Knotengrad $\geq 3 \Rightarrow N \leq \frac{2}{3}E$

→ $N = O(n)$, $E = O(n)$

Eine Anwendung des Voronoi-Diagramms:

Minimaler aufspannender Baum (*minimal spanning tree*
= MST; "minimaler Spannbaum")

Anwendung: z.B. Minimierung von Kabelnetzen zwischen
gegebenen Punkten in der Ebene

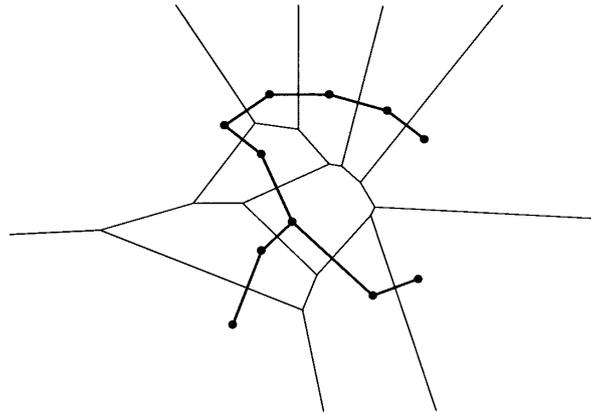
Minimaler Spannbaum (minimum spanning tree)

zu einer Menge S von n Orten

= zusammenhängender Graph,

Summe der Längen aller Kanten minimal

Beispiel (11 Punkte gegeben; MST und VD):



Algorithmus von Kruskal: berechnet MST für Graph

$G = (V, E, dist)$ mit Kantengewichten $dist$ in Zeit $O(|E| \log |E|)$:

halte Wald von Bäumen über disjunkten Teilmengen von V

starte mit einelementigen Bäumen $\forall v \in V$

für die Kanten $e \in E$ in aufst. Reihenfolge von $dist(e)$

falls e zwei Teilbäume T_1, T_2 verbindet:

entferne T_1, T_2 , füge $T = tree(T_1, T_2, e)$

sonst vergiß e

naive Anwendung: $E = V \times V \Rightarrow$ Zeit $O(n^2 \log n)$

besser: betrachte nur die $O(n)$ vielen Kanten e , die direkte Voronoi-Nachbarn miteinander verbinden \Rightarrow Zeit $O(n \log n)$

(Ausnutzung des Zusammenhangs von nächsten Nachbarn und Nachbarschaft der VR)

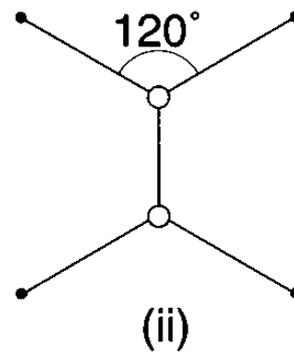
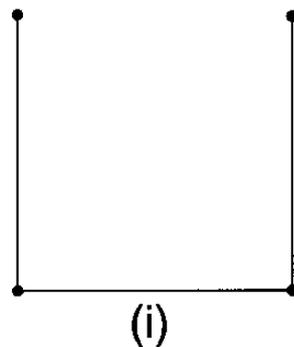
Bemerkung: es geht noch besser (Cheriton & Tarjan 1976): MST in Zeit $O(n)$, falls VD gegeben.

Bemerkung: Für Verkabelungsprobleme etc. ist MST oft nicht die optimale Lösung:

Einführung von Zwischenknoten (*Steinerpunkte*)

→ *Steinerbaum* (Länge max. Faktor $1/3$ kürzer als MST)

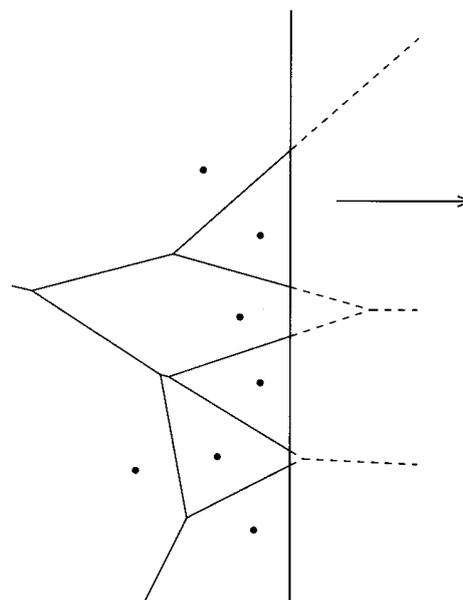
Berechnung minimaler Steinerbäume ist NP-vollständig



(i) MST, Länge 3; (ii) Steinerbaum, Länge $1 + \sqrt{3} = 2,732\dots$

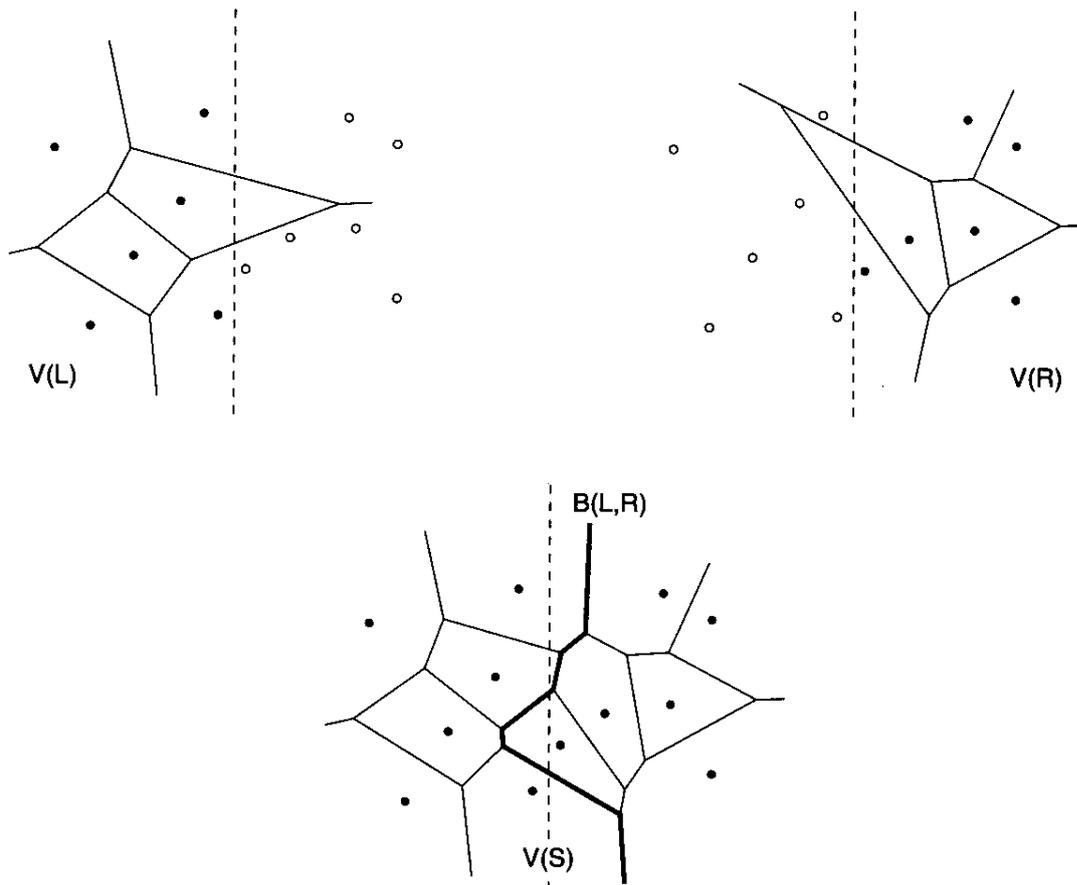
Bemerkungen zur Konstruktion des Voronoi-Diagramms:

Das Voronoi-Diagramm von n Punkten in der Ebene lässt sich mit einem Sweep-Verfahren im *worst case* in der Zeit $O(n \log n)$ und mit linearem Speicherplatz berechnen, und das ist optimal.



Mit größenordnungsmäßig ebenso günstigem Aufwand lässt sich das VD auch mit einem *divide-and-conquer*-Ansatz bestimmen (Shamos 1975).

Prinzip: Teilung der Punktmenge in 2 Teilmengen längs einer Splitgeraden, Mischen der beiden VD der Teilmengen (s. Klein 1997).



Das Power-Diagramm

"Power-Distanz" eines Punktes x zu einem Kreis (bzw. einer Kugel) $B_{c,p}$ (mit Mittelpunkt c und Radius p):

$$d_{\text{pow}}(x, B_{c,p}) = d^2(x, c) - p^2$$

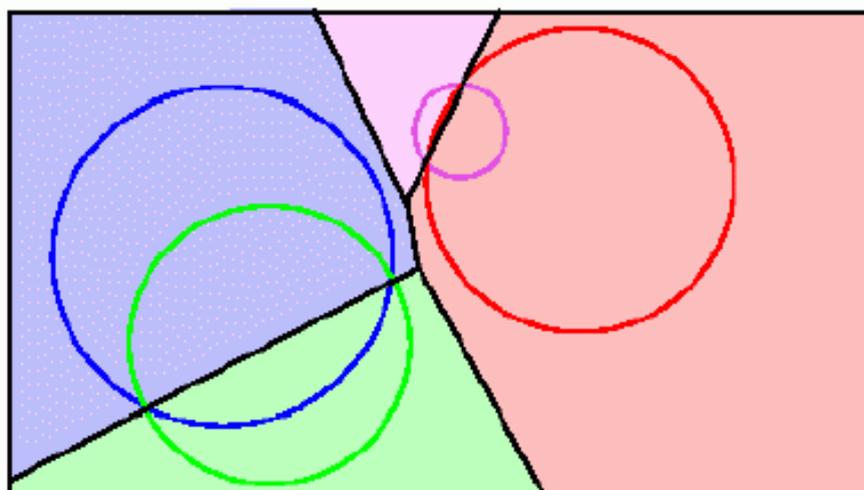
- x im Inneren von $B_{c,p}$: Power-Distanz negativ
- x im Äußeren von $B_{c,p}$: Power-Distanz positiv

keine Metrik im math. strengen Sinne

Power-Diagramm:

gegeben: Menge S von *gewichteten* Punkten (c, p^2)
- ein Punkt c mit Gewicht p^2 wird durch einen Kreis $B_{c,p}$ mit Mittelpunkt c und Radius p dargestellt

jede Zelle eines Punktes (c, p^2) des Power-Diagramms besteht aus allen Punkten der Ebene (bzw. des Raumes), für die $B_{c,p}$ nächster Nachbar bzgl. der Power-Distanz ist.



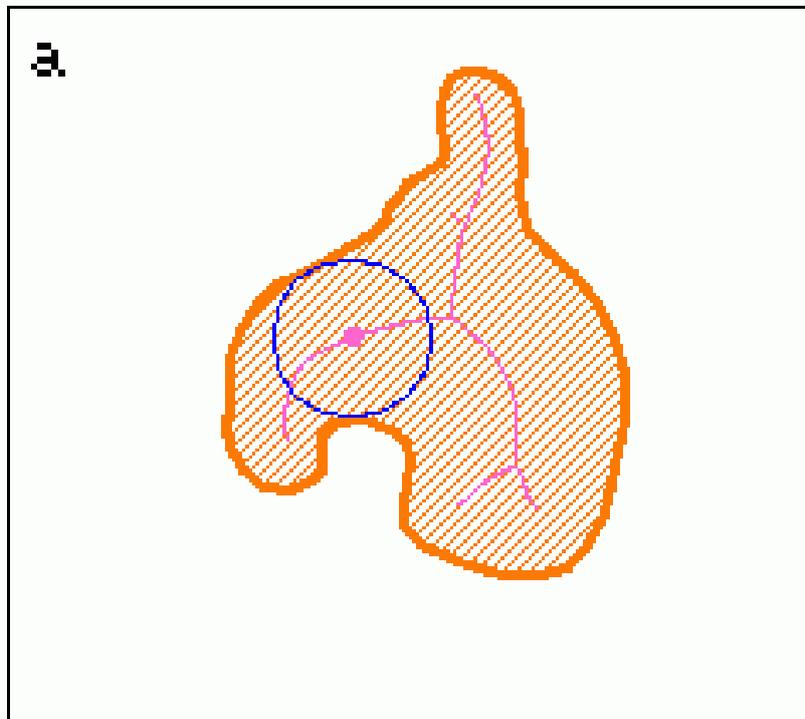
Power-Diagramm von 4 gewichteten Punkten

⇒ "gewichtete Form" des Voronoi-Diagramms

Anwendung:
Rekonstruktion von Oberflächen aus 3D-Punktwolken
(z.B. Laserscannerdaten)
"Power Crust"-Verfahren von Amenta, Choi & Kolluri
(2001)

siehe Referat von A. Christan,
http://www.uni-forst.gwdg.de/~wkurth/cb/html/a3d_christan.pdf

zusätzlich zur Oberfläche wird die Mittelachse des
gescannten Objekts approximiert (Ort der Mittelpunkte
aller maximalen Kugeln, die in das Objekt passen) (a)



prinzipieller Ablauf des Verfahrens:

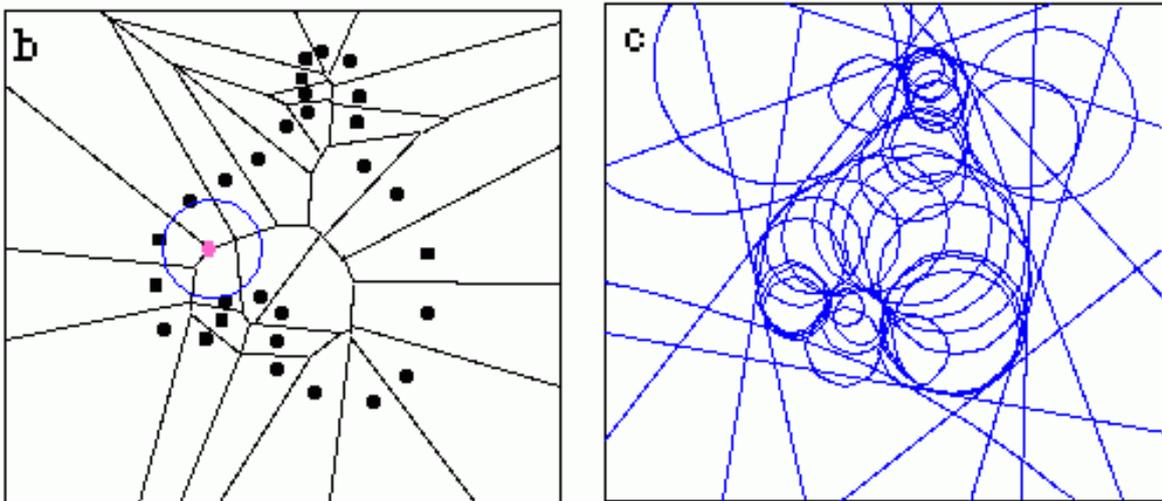
- Von der Menge S der gescannten Punkte wird das 3-D Voronoi-Diagramm konstruiert (b) (ein extremer Knoten des VD mit maximaler Kugel ist eingezeichnet)
- bei dichter Punktwolke sind die Zellen des VD lang und dünn und senkrecht zur Oberfläche orientiert

- Teilmengen der Knoten des VD: innere und äußere *Pole*

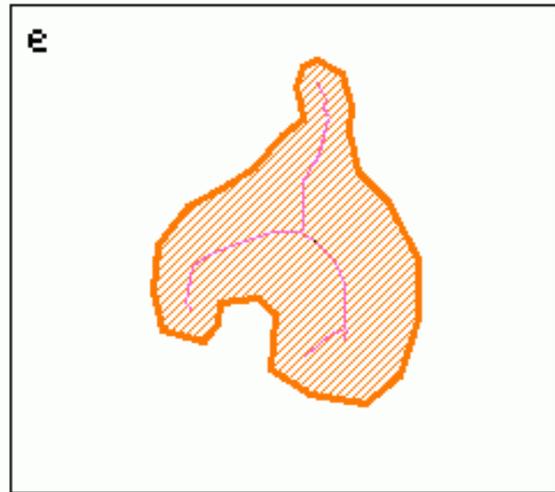
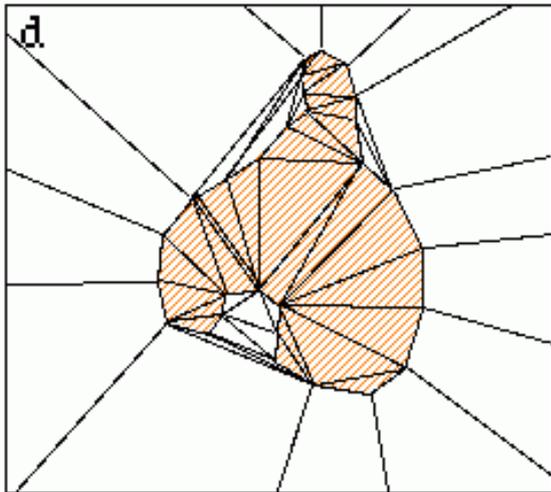
- Pole eines Punktes s : am weitesten entfernte Voronoi-Knoten im Inneren und im Äußeren der approximierten Menge

(Labelling-Algorithmus legt fest, welche Knoten des VD als "innen" und welche als "außen" angesehen werden)

Innere und äußere *Pol-Kugeln*: Kugeln um die Pole, welche die Punkte der Menge S gerade berühren (maximale Kugeln mit leerem Inneren) (c)



- die Radien der Pol-Kugeln definieren Gewichte der Pole
- die Menge der Mittelpunkte der Pol-Kugeln approximiert die Mittelachse der Menge S
- Approximation der Rücktransformation von der Mittelachse zur gesuchten Menge (Objektoberfläche): durch das Power-Diagramm der gewichteten Pole (d)



zu inneren Polen gehören innere Zellen
 ⇒ Grenze zwischen inneren und äußeren Zellen
 = "*power crust*" = Approximation der Oberfläche
 (Output)

zusätzlicher Output: Verknüpfung der inneren Pole
 entspr. der Nachbarschaft ihrer Power-Diagramm-Zellen
 = Approximation der Mittelachse des Objektes (siehe
 (e))

Beispiel:

links: lasergenerierte Punktwolke

Mitte: mit dem Verfahren erzeugtes polygonales Modell ("wasserdicht")

rechts: approximierte Mittelachsenstruktur (Skelettierung)



(aus Amenta, Choi & Kolluri 2001)