

## 2. Eigenschaften und Datenstrukturen für digitale Bilder, Rasterung und Quantisierung

Digitales Bild (Rasterbild):

Matrix  $f = (f_{m,n})$ ,  $m = 0; 1; \dots, m_{\max}$ ,  $n = 0; 1; \dots, n_{\max}$

Werte  $f_{m,n}$  entsprechen Helligkeiten (brightness) oder anderen Größen

$f_{m,n} \in \{0; 1\}$ : **Binärbild**

$f_{m,n} \in \{0; 1; \dots; \text{Max}\}$ : **Grauwertbild**

$f_{m,n} \in \{0; 1; \dots; \text{Max}\} \times \{0; 1; \dots; \text{Max}\} \times \{0; 1; \dots; \text{Max}\}$ :  
**Farbbild** für Farbmodell mit 3 Komponenten  
(RGB, YIQ, HSV, HLS...)

$f_{m,n} \in \{0; 1; \dots; \text{Max}\} \times \{0; 1; \dots; d_{\max}\}$ : **attributiertes Grauwertbild**, z.B. mit Tiefeninformation

Bildpunkt im Raster: *Pixel* (picture element)

*räumliche Auflösung* eines Bildes  $f$ :  $(m_{\max}+1, n_{\max}+1)$

*spektrale Auflösung*: Bandbreite des Frequenzbereichs des verwendeten Sensors bei der Aufnahme

*radiometrische Auflösung*: Anzahl unterscheidbarer Graustufen (Max+1)

*zeitliche Auflösung* (bei Bildfolgen): Zeitintervall zwischen 2 aufeinanderfolgenden Einzelbildern

Bilder werden auch aufgefasst als:

- Linearkombination einfacher, 2-dim. Basisfunktionen (z.B. trigonometrische Funktionen: Fourier-Analyse)  $\rightarrow$  Bild im math. Modell als kontinuierliche Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- Realisierung stochastischer Prozesse ( $\rightarrow$  Anwendung beschreibender und schließender Statistik)

## Eigenschaften von Bildern und Bildinhalten

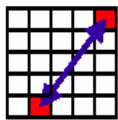
innerhalb von Rasterbildern möchte man Abstände messen

- **Distanzmaße**

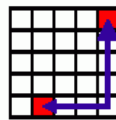
Euklidische Distanz  $D_E[(i, j)(h, k)] = \sqrt{(i-h)^2 + (j-k)^2}$

City Block Distanz  $D_4[(i, j)(h, k)] = |i-h| + |j-k|$

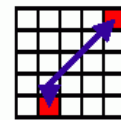
Schachbrett Distanz  $D_8[(i, j)(h, k)] = \max\{|i-h|, |j-k|\}$



$$D_E = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

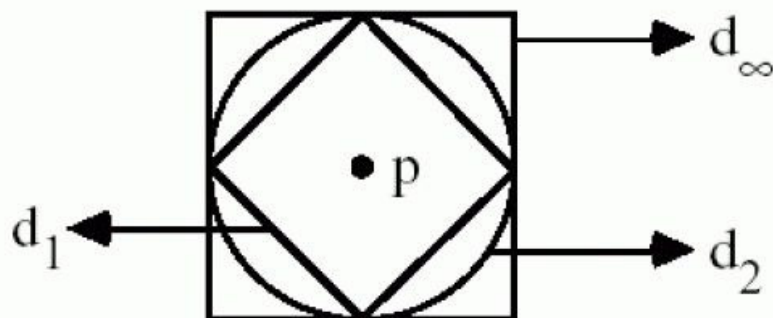


$$D_4 = 3 + 4 = 7$$

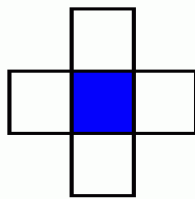


$$D_8 = \max(3, 4) = 4$$

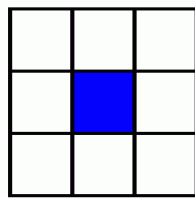
"Kreise" mit Radius 1 um einen gegebenen Punkt p:



# Nachbarschaften

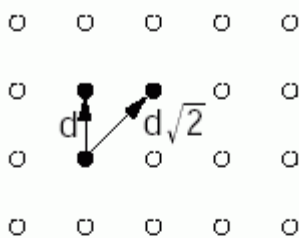


4er Nachbarschaft



8er Nachbarschaft

## Orthogonalraster



$P_{NW}$	$P_N$	$P_{NO}$
$P_W$	$P$	$P_O$
$P_{SW}$	$P_S$	$P_{SO}$

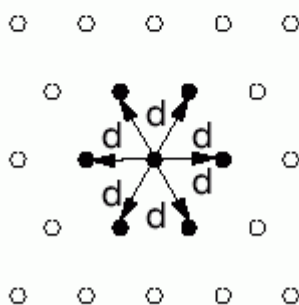
### 4 er Nachbarschaft :

$$N_4(P) = \{P_N, P_O, P_S, P_W\}$$

### 8 er Nachbarschaft :

$$N_8(P) = \{P_N, P_{NO}, P_O, P_{SO}, P_S, P_{SW}, P_W, P_{NW}\}$$

## Hexagonalraster



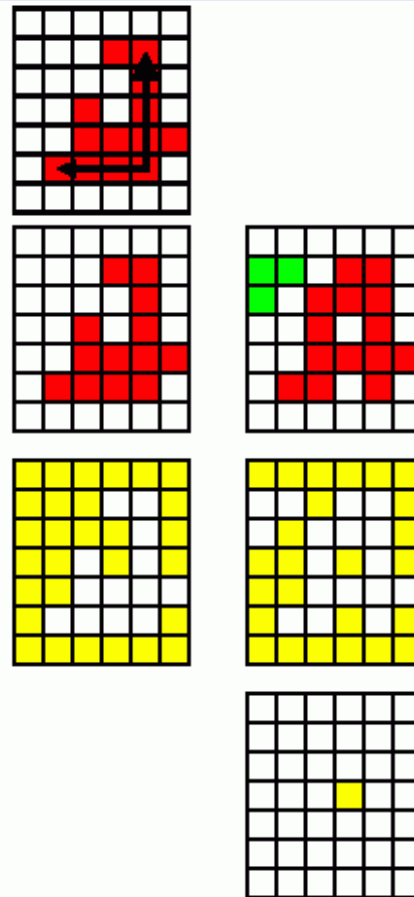
	$P_1$	$P_2$	
$P_6$	$P$	$P_3$	
	$P_5$	$P_4$	

### 6 er Nachbarschaft :

$$N_6(P) = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$$

# Topologische Merkmale

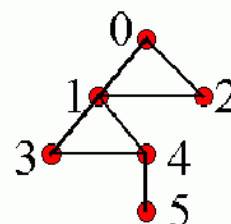
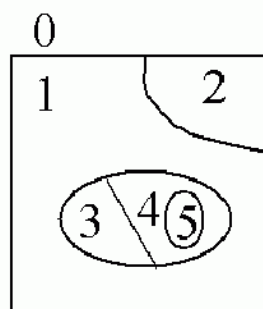
- Pfad
- Region
- Hintergrund
- Löcher



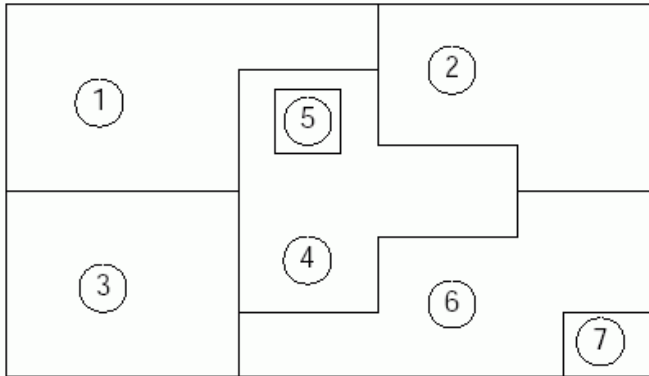
eine Möglichkeit der Bildanalyse:

Aufteilung in Regionen (durch Segmentierung; später!) und Konstruktion eines *Adjazenzgraphen* (Relation für Kanten: Nachbarschaft) der Regionen.

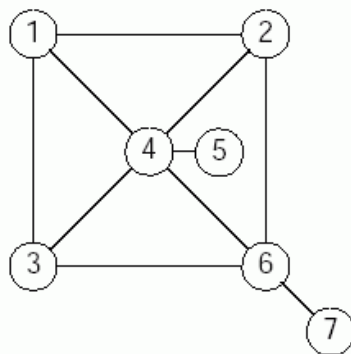
- Bildelemente und deren Relationen darstellen
- Graph=(V,E) mit Knoten V und Kanten E
- gewichteter Graph
- Region adjacency graph:



a) Regionen in der Bildmatrix



b) zugehöriger Nachbarschaftsgraph

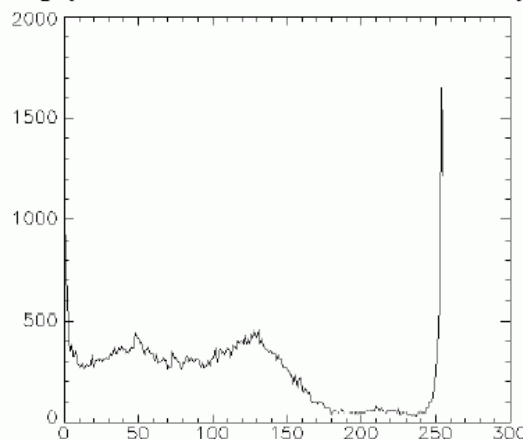


## Radiometrische Merkmale:

Bildmerkmale, die auf den Grauwerten (oder Farbwerten) der Pixel beruhen

Das *Histogramm* der Grauwertverteilung (vgl. Übung 1)

- gibt die **Häufigkeiten** der Helligkeitswerte im Bild an.
- Algorithmus: Histogramm  $h(*) = 0$   
Für jeden Pixel  $(x,y)$  inkrementiere  $h(f(x,y))$



auf der  $x$ -Achse können die Intensitätswerte klassiert werden, Histogramm dann abhängig von der gewählten Klassierung.

Normierung auf der  $y$ -Achse: Verwendung der relativen Häufigkeiten  $h_{rel}(p) = h(p)/N$  ( $N$  = Anzahl der Pixel).

Alternative Beschreibung der Verteilung, unabh. von Klassierung:

die *kumulative Verteilungsfunktion*

$$h_c(p) = \sum_{i=0}^p h_{rel}(i)$$

eine monoton steigende Treppenfunktion

## *Informationen aus dem Histogramm:*

Kenngößen der beschreibenden Statistik

Mittelwert, Varianz, Standardabweichung, Schiefe, Kurtosis (Exzess), Median, Quantile; Entropie, Anisotropiekoeffizient (siehe Übung 1)

Form des Histogramms gibt i.allg. mehr Informationen als diese Kenngrößen!

## **Messung der *Bildqualität*:**

- **Störungen** bei der Aufnahme, Übertragung
- Qualitätsansprüche hängen ab vom Verwendungszweck
- **Subjektive** Methoden: Visuelle Testgruppe
- **Objektive** Methoden: Differenzen zu Referenzbildern (quadratische Differenz, absolute Differenz, maximale Differenz) oder Auflösungsvermögen bei Linienbildern

## Rauschen im Bild (Störungen):

- Beschreibung durch Wahrscheinlichkeiten
- **Weißes Rauschen**: Spektrum konstant
- **Gauß'sches Rauschen**
- Bei Bildern meist **additives** Rauschen

$$f(x, y) = g(x, y) + v(x, y)$$

- signal-to-noise-ratio (**SNR**)

$$SNR = \frac{F}{E} = \frac{\sum_{(x,y)} f^2(x, y)}{\sum_{(x,y)} v^2(x, y)}$$

- **Multiplikatives** Rauschen (z.B. Fernsehen)

$$f = g + vg = g(1 + v) \approx gv$$

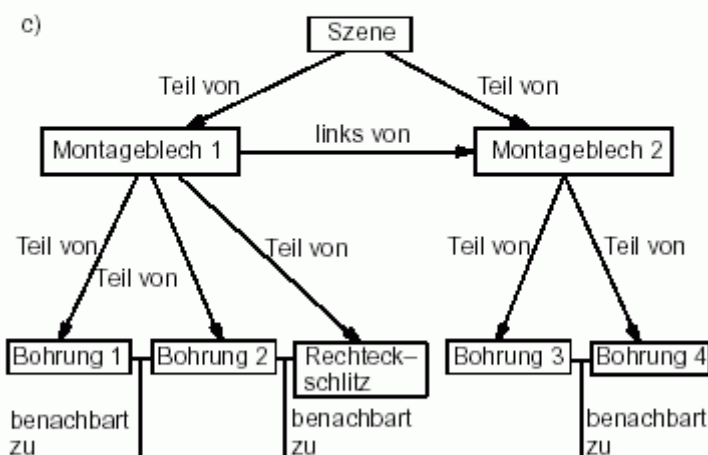
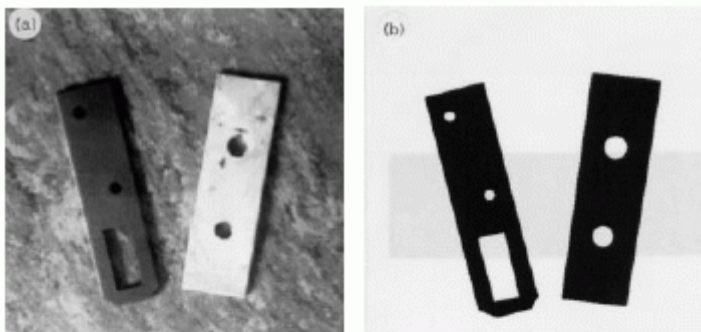
- **Quantisierungsrauschen**: entsteht wenn zu wenig Quantisierungsstufen verwendet werden.
- **Impulsrauschen**: nur einzelne Pixel sind verwechselt
- **Salt and Pepper Noise**: schwarze und weiße gestörte Einzelpixel



## Datenstrukturen für Bildinformationen

- Datenorganisation beeinflusst Implementierung erheblich!
- Datenrepräsentationsebenen
- Traditionelle Bilddatenstrukturen  
Matrizen, Chains, Topologische Strukturen, Relationale Strukturen
- Hierarchische Bilddatenstrukturen  
Pyramiden, Quadrees, ...

Darstellungsformen eines Bildes:



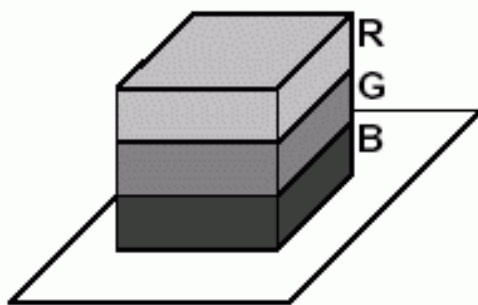
(a) Ikonisches Bild

(b) Segmentiertes Bild

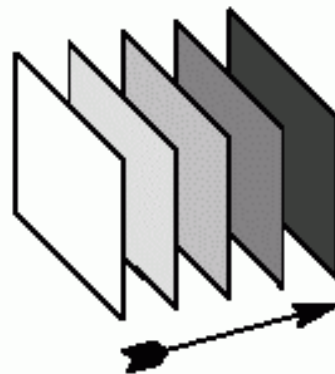
(c) Symbolische Beschreibung durch einen (attributierten) relationalen Graphen

- **Iconic Images:** Originaldaten, Bildmatrix mit Helligkeitswerten, Vorverarbeitung
- **Segmented Images:** Gruppierung von Bildteilen zu einzelnen Objekten
- **Geometric Repräsentation:** beinhalten Info über 2D und 3D Form
- **Relational Models:** Objekte + Wissen über die Objekte, AI, Frames, Semantische Netze

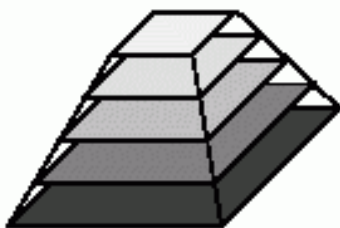
Repräsentationsformen von Bildern:



Vektorfelder, z.B.  
RGB-Feld



Folgen



Pyramiden



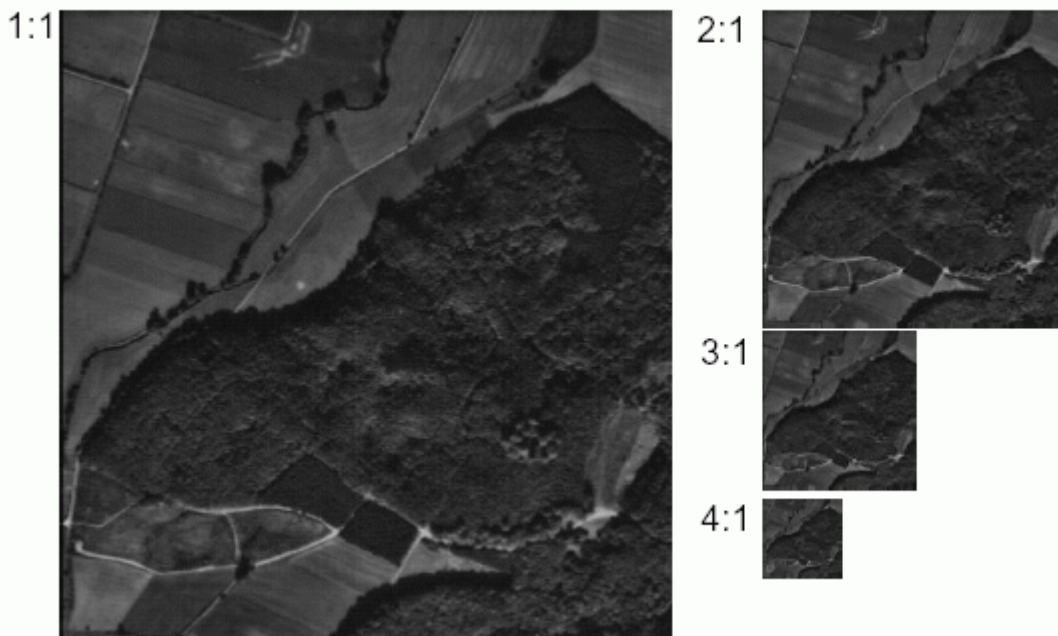
Mosaik

## Häufigste und elementarste Form der Bilddarstellung: *Matrizen*

- entsprechen dem Format vieler Aufnahmegeräte
- Einträge der Matrix entsprechen Helligkeit oder anderen Eigenschaften
- auch hexagonale Abtastgitter können mit "gewöhnlichen" Matrizen dargestellt werden:  
verschiebe jede 2. Zeile um ein halbes Pixel nach rechts
- räumliche Information implizit (Nachbarschaften)
- Verallgemeinerung: mehrere Matrizen mit gleichem Bildinhalt, aber unterschiedlicher Auflösung – *Bildpyramide* (= hierarchische Datenstruktur)

### Bildpyramide

---



## Co-occurrence-Matrix

Einträge sind die abs. Häufigkeiten des Eintretens einer vorgegebenen Relation  $\rho$  zwischen 2 Helligkeitswerten  $i, j$

– meist für Nachbarschaftsrelationen

- globale Bildinformation
- Darstellung von räumlich abhängigen Helligkeitswahrscheinlichkeiten
- Anwendung in der Texturanalyse

Beispiel:

Bildfunktion ist  $E$ , Breite  $L_x$ , Höhe  $L_y$ , Relation ist "Abstand zweier Pixel in gegebener Richtung ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  oder  $135^\circ$ ) ist  $d$ "

Definitionen der Matrix-Einträge dann:

$$P(i, j, d, 0^\circ) = \# \left\{ \left\{ (k, l), (m, n) \in (L_x \times L_y) \times (L_x \times L_y) \right\} \right. \\ \left. k - m = 0, |l - n| = d, E(k, l) = i, E(m, n) = j \right\}$$

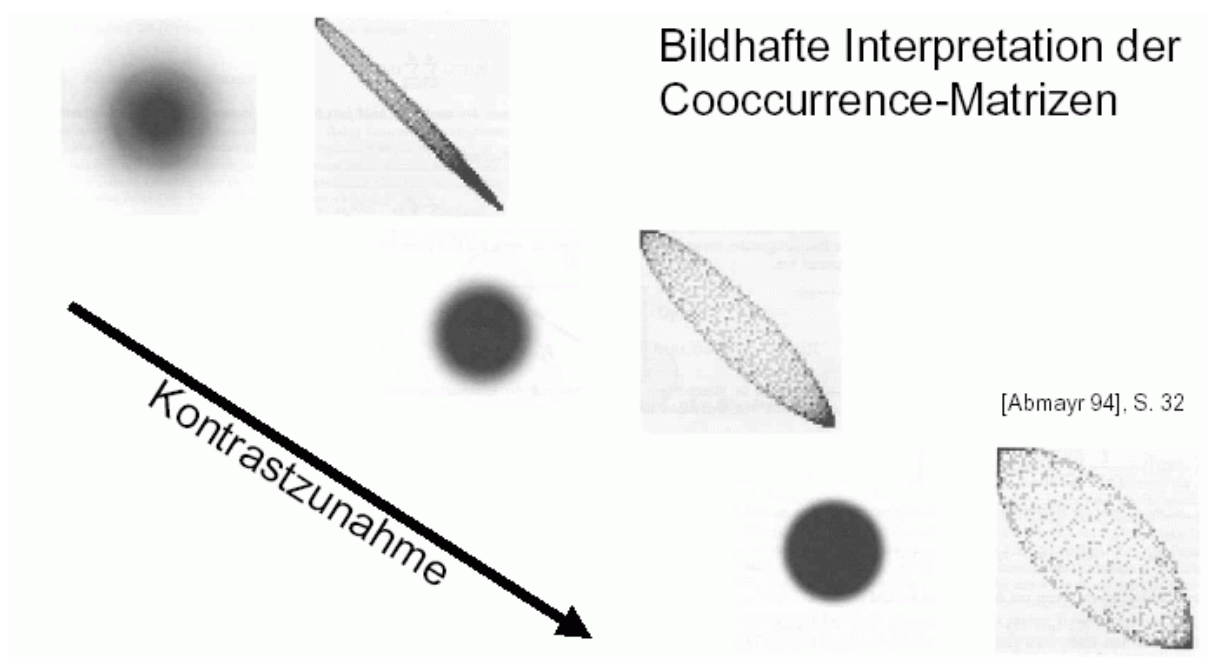
$$P(i, j, d, 45^\circ) = \# \left\{ \left\{ (k, l), (m, n) \in (L_x \times L_y) \times (L_x \times L_y) \right\} \right. \\ \left. (k - m = d, l - n = -d) \text{ oder} \right. \\ \left. (k - m = -d, l - n = d), \right. \\ \left. E(k, l) = i, E(m, n) = j \right\}$$

$$P(i, j, d, 90^\circ) = \#\left\{ \left\{ (k, l), (m, n) \in (L_x \times L_y) \times (L_x \times L_y) \right\} \right. \\ \left. |k - m| = d, l - n = 0, E(k, l) = i, E(m, n) = j \right\}$$

$$P(i, j, d, 135^\circ) = \#\left\{ \left\{ (k, l), (m, n) \in (L_x \times L_y) \times (L_x \times L_y) \right\} \right. \\ \left. (k - m = d, l - n = d) \text{ oder} \right. \\ \left. (k - m = -d, l - n = -d), \right. \\ \left. E(k, l) = i, E(m, n) = j \right\}$$

Normierung (für  $d = 1$ ) durch:

$2N_y(N_x - 1)$  (für  $0^\circ$  und  $90^\circ$ ) sowie  $2(N_y - 1)(N_x - 1)$  (für  $45^\circ$  und  $135^\circ$ )



## Ketten (Chains)

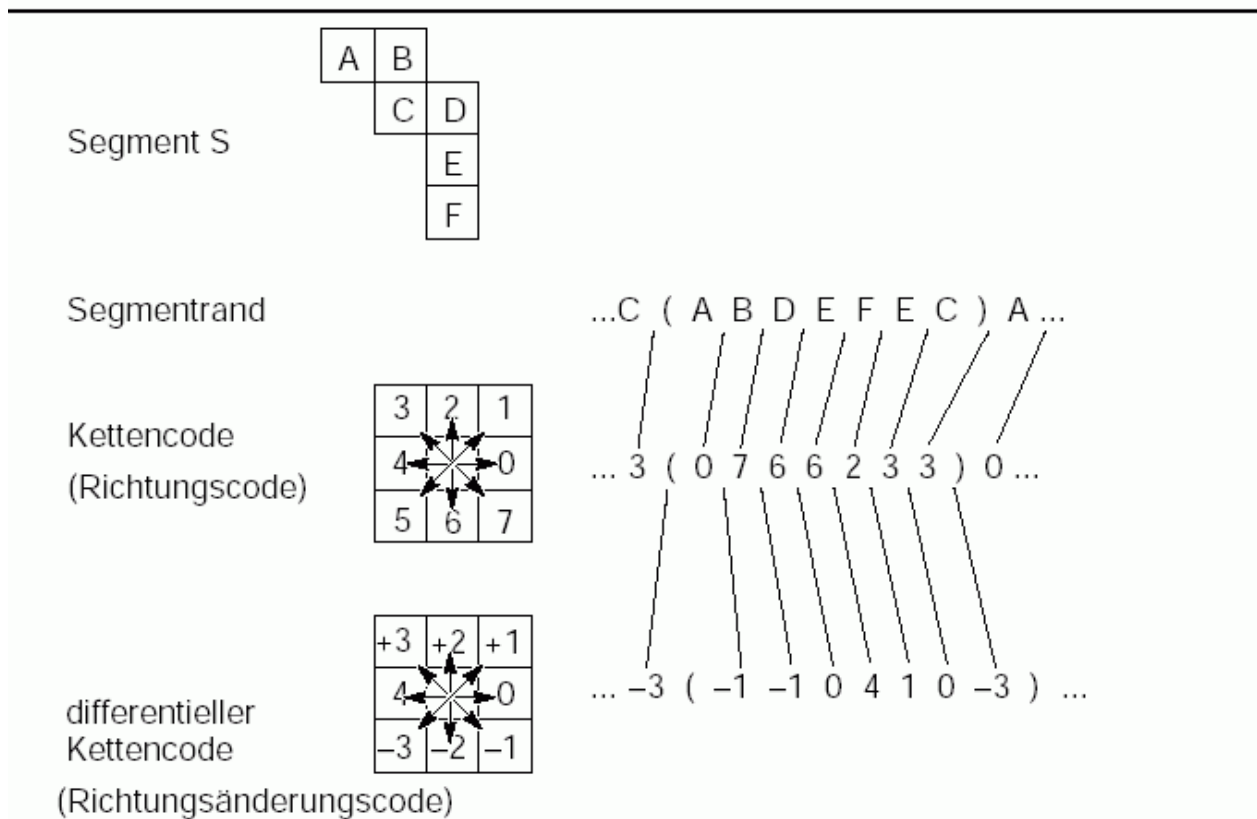
Verwendung zur Beschreibung von Regionen-Grenzen / Rändern

*absoluter Kettencode*: Referenzpunkt + globale Richtungsangaben (Nord, Ost, Süd, West etc.)

Nummerierung der Richtungen nach Konvention

*differenzieller Kettencode*: lokale Richtungsangabe (vgl. Turtle Geometry), rotationsunabhängig

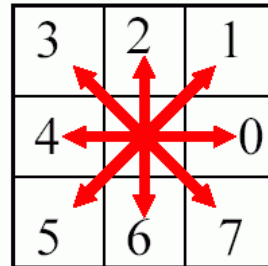
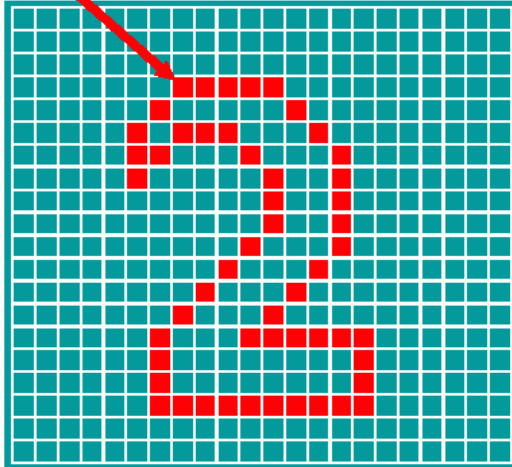
### Segmentrandbeschreibung durch Flächenelemente (Pixel)



## Beispiel:

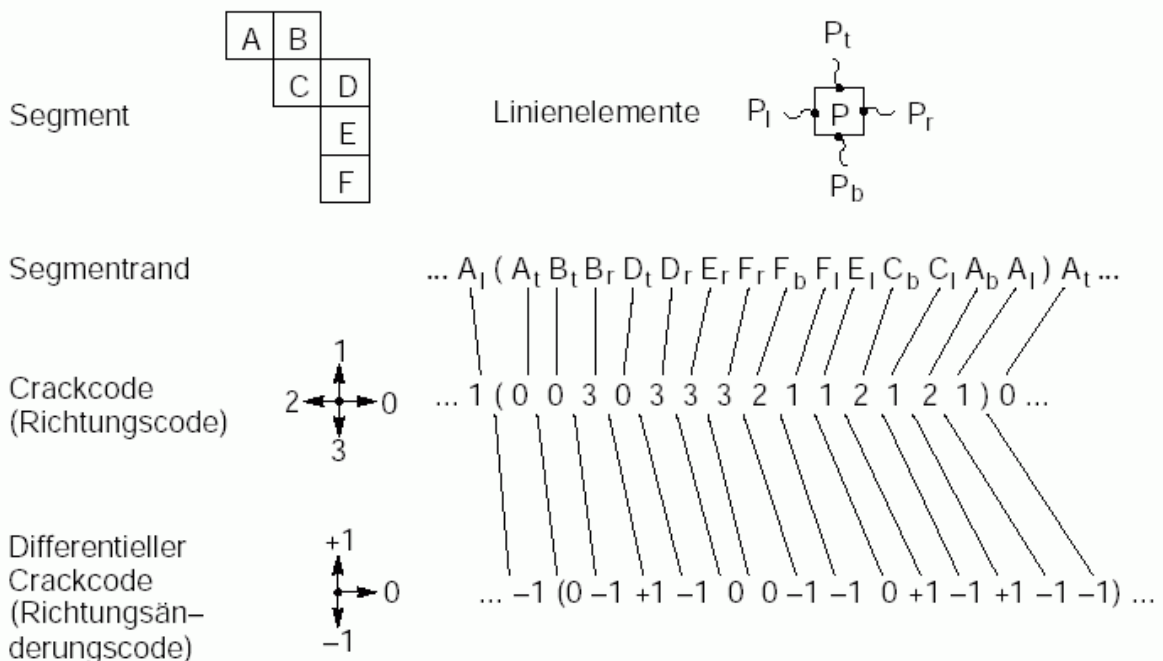
- mit absoluten Richtungscodes

00007776666555500000666444444442221111122334455221



## Modifikation: Crackcode

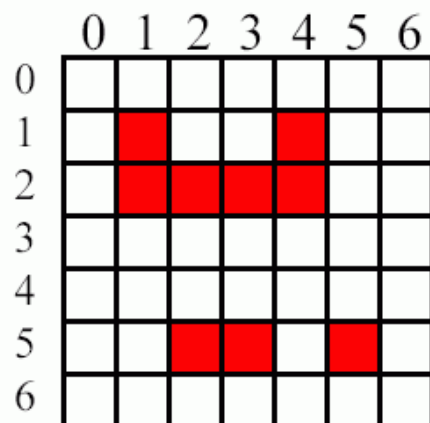
### Segmentrandbeschreibung durch Linienelemente (Cracks)



## Laufängencodierung (run length coding):

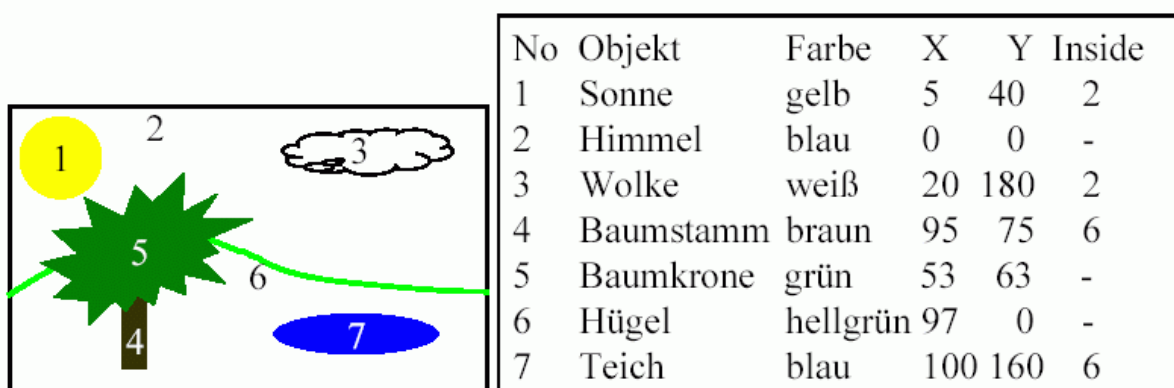
- für einzelne Zeilen werden Intervalle gleicher Intensität durch Anfangs- und Endposition (oder durch Anfang und Länge) beschrieben
- Verwendung z.B. beim Fax

Beisp.:



(11144)(214)(52355)

## Relationale Strukturen



- Beispiel setzt Segmentierung und Klassifikation voraus
- auf niedrigerem Level (geometrische Primitive):  
*point attribute table, line attribute table, polygon attribute table* (z.B. in geografischen Informationssystemen - GIS)

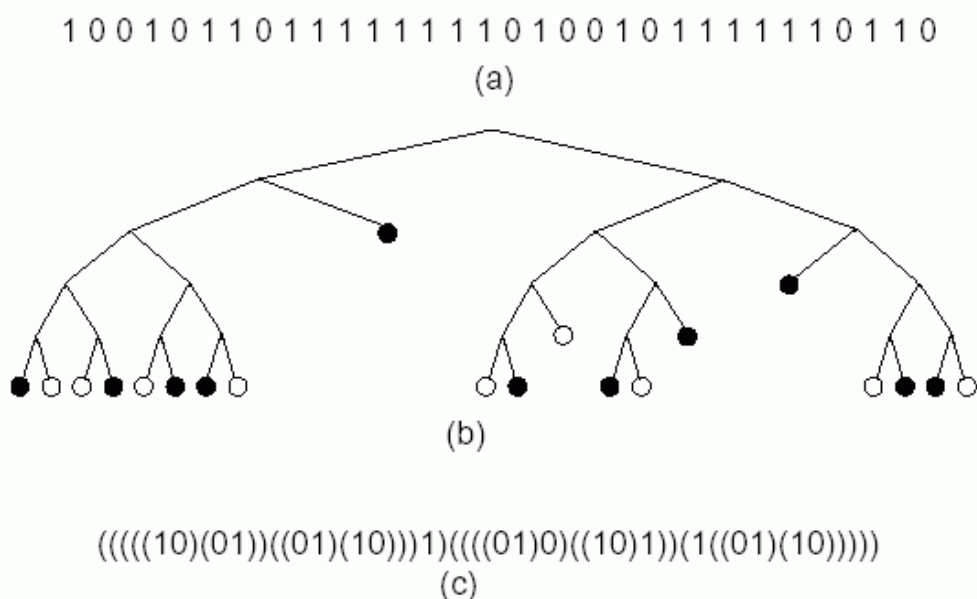


## Hierarchische Datenstrukturen

- Bildverarbeitung ist rechenintensiv aufgrund der großen Datenmengen
- Darstellung der Daten in verschiedenen großen Mengen
  - erste Schritte mit wenig Daten
  - Verfeinerung nur wo notwendig
- Bildpyramiden
- Quadrees

1-dimensionaler Fall:

### Repräsentation einer Bildzeile durch einen Binärbaum



(a) Zeile eines Binärbildes

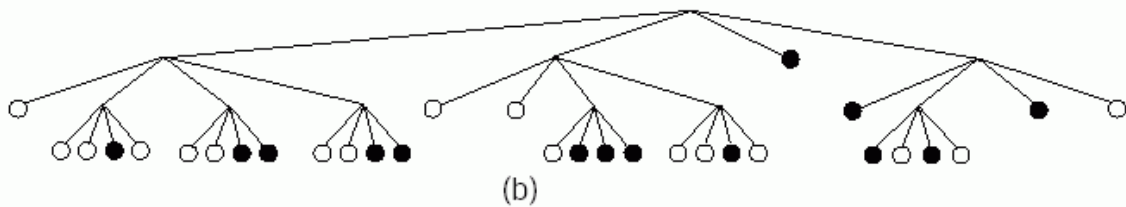
(b) Repräsentation der Zeile als Binärbaum

(c) Repräsentation des Binärbaums als String

## Bildrepräsentation durch einen Quaternärbaum (Quadtree)

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0

(a)



(b)

(a) Bildaufteilung

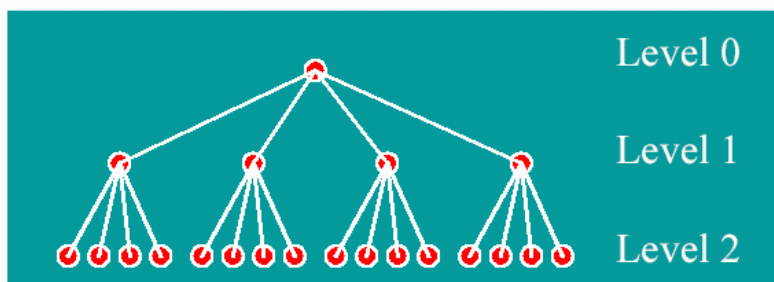
(b) Darstellung als Baum

Bildpyramide:

- Matrixpyramiden: Folge von Matrizen

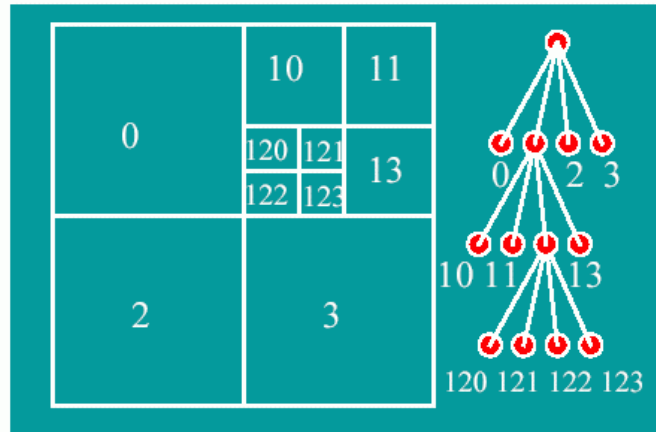
$$\{M_L, M_{L-1}, \dots, M_0\}$$

- L ... Pyramidenebene
- Darstellung als Baum: Tree-Pyramid



## Quadtree:

- Spezialfall einer Baumpyramide
- homogene Flächen werden nicht weiter unterteilt.
- NT: Geringe Verschiebungen im Bild haben starke Auswirkungen im Quadtree



## ***Rasterung (Digitalisierung, Sampling, Abtastung)***

Rasterung auf 2D-Bildmatrix

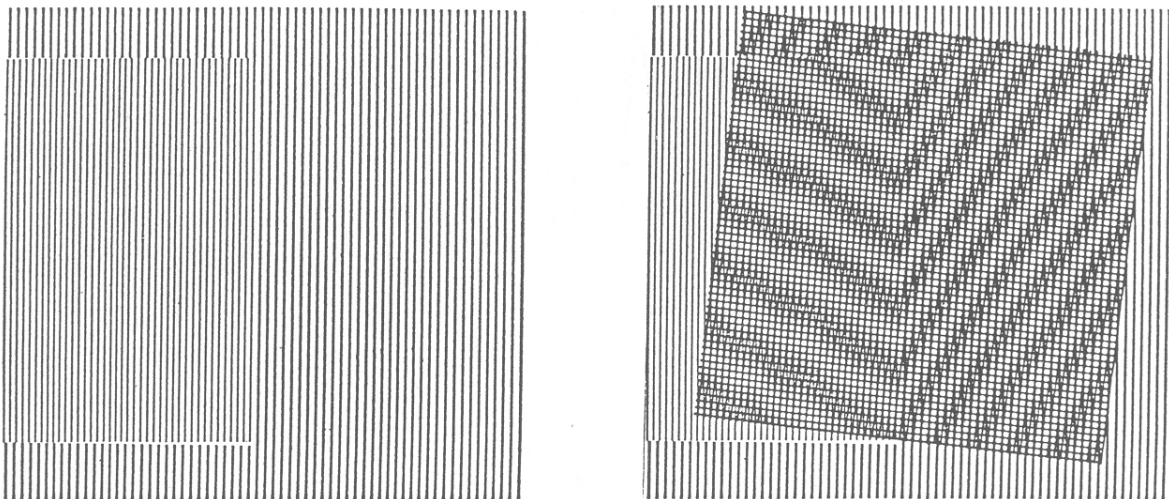
mathematisch: Abb. einer 2-dim. Bildfunktion mit kontinuierlichem Definitionsbereich auf digitales Bild im obigen Sinne, also auf 2-dim. Matrix mit diskretem Def.bereich.

$$f(x_1, x_2) \rightarrow f_{m,n} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Digitalisierung immer verbunden mit Informationsverlust  
– oft auch mit Verfälschungen des ursprüngl. Bildes

Moiré-Effekt:

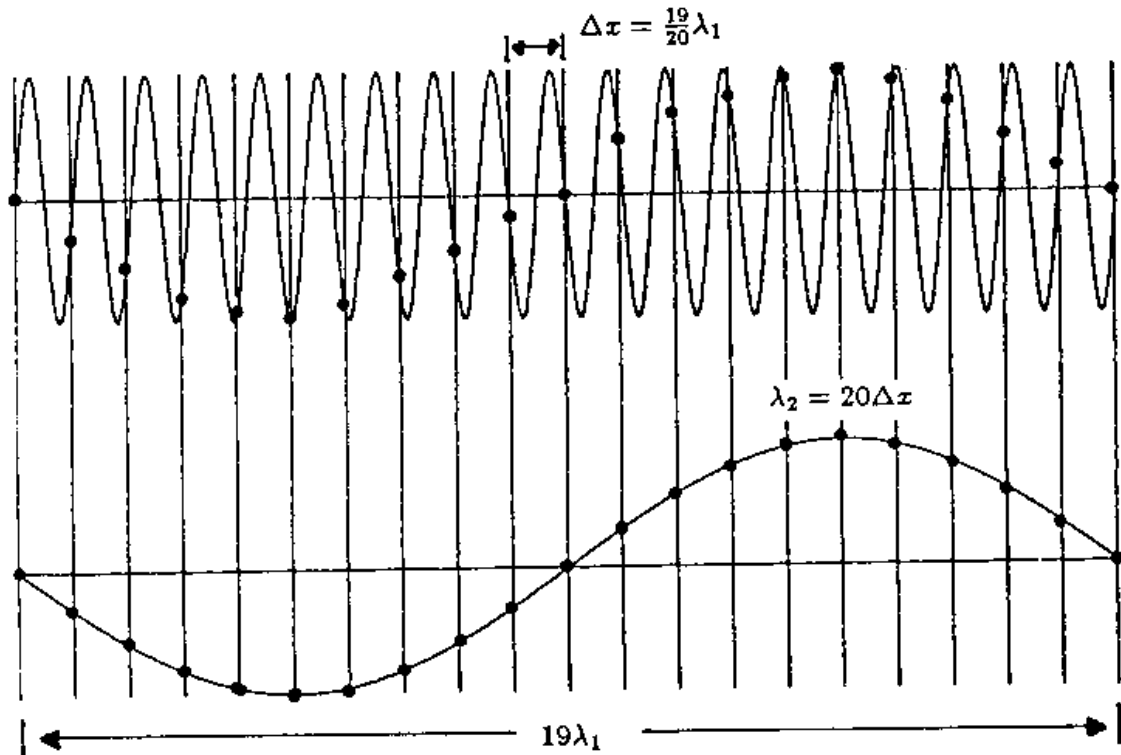
links Originalbild: zwei eindim. Gitter mit verschiedenen Linienabständen, rechts wird die Digitalisierung durch Überlagerung eines 2-dim. Rasters simuliert



(aus Jähne 1993)

= Spezialfall eines *Aliasing*-Phänomens

1-dimensionales Analogon:  
 Abtastung einer Sinusschwingung mit einem  
 Abtastintervall, das in der Nähe der Wellenlänge liegt



⇒ es entsteht eine "Scheinschwingung" mit großer Wellenlänge

Hintergrund für Behandlung von Aliasing-Phänomenen:  
 Übergang vom 2-dim. Ortsraum in den 2-dim. Frequenzraum (*Fourier-Transformation*)

Transformation

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xu + yv)} dx dy$$

Inverse Transformation

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu + yv)} du dv$$

# Eigenschaften der FT

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)\} = F(u, v)$$

- Linearität

$$\mathfrak{F}\{af_1(x, y) + bf_2(x, y)\} = aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$$

- Verschiebung im Bildbereich

$$\mathfrak{F}\{f(x - a, y - b)\} = F(u, v)e^{-2\pi i(au + bv)}$$

- Verschiebung im Frequenzbereich

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)e^{2\pi i(u_0x + v_0y)}\} = F(u - u_0, v - v_0)$$

(Beichel 2002)

in den folgenden Formeln benötigen wir eine Verknüpfung von Funktionen,  $g = f * h$ :

- Faltung 
$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a, b)h(x - a, y - b)dadb$$
$$(f * h)(x, y) = (h * f)(x, y)$$

(Kommutativität)

Hinsichtlich der Fouriertransformation gilt eine Dualität zwischen Faltung und punktweiser Multiplikation:

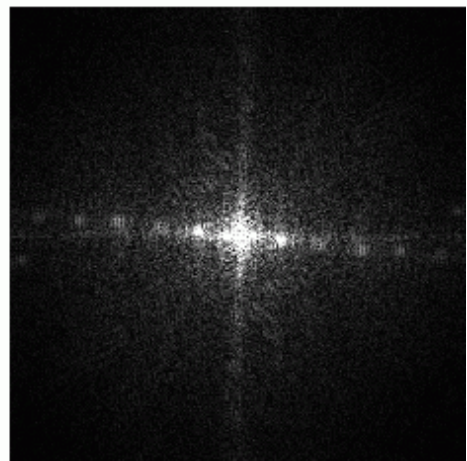
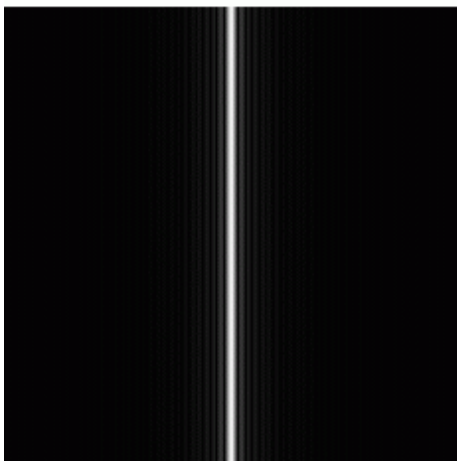
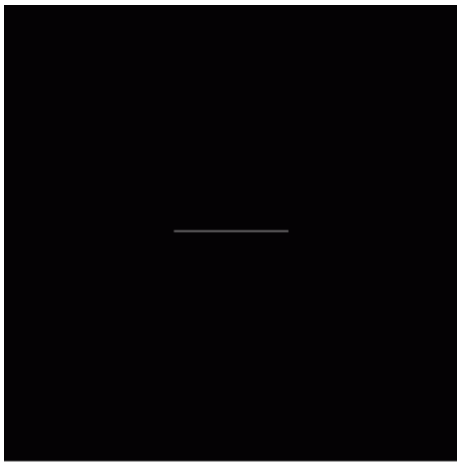
- Dualität der Faltung

$$\mathfrak{F}\{(f * h)(x, y)\} = F(u, v)H(u, v)$$

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)h(x, y)\} = (F * H)(u, v)$$

## Beispiele für die Anwendung der FT:

(oben: Ausgangsbild, unten: Transformation in den Frequenzraum)



*zurück zur Digitalisierung:*

die Abtastfunktion ist ein "Kamm" aus vielen Nadelimpulsen (Dirac-Impulsen  $\delta$ )

die abgetastete Funktion entsteht durch (punktweise) Produktbildung mit diesem "Abtast-Nagelbrett":

- Abtastfunktion 
$$s(x, y) = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y)$$

- Abgetastete Funktion

$$\begin{aligned} f_s(x, y) &= f(x, y)s(x, y) \\ &= f(x, y) \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y) \end{aligned}$$

Dem Deltakamm ("Nagelbrett") im Ortsraum entspricht im Frequenzraum auch eine Gitterfunktion, das *reziproke Gitter* (wichtig in der Kristallographie / Röntgenstrukturanalyse, Interferenzbilder!)

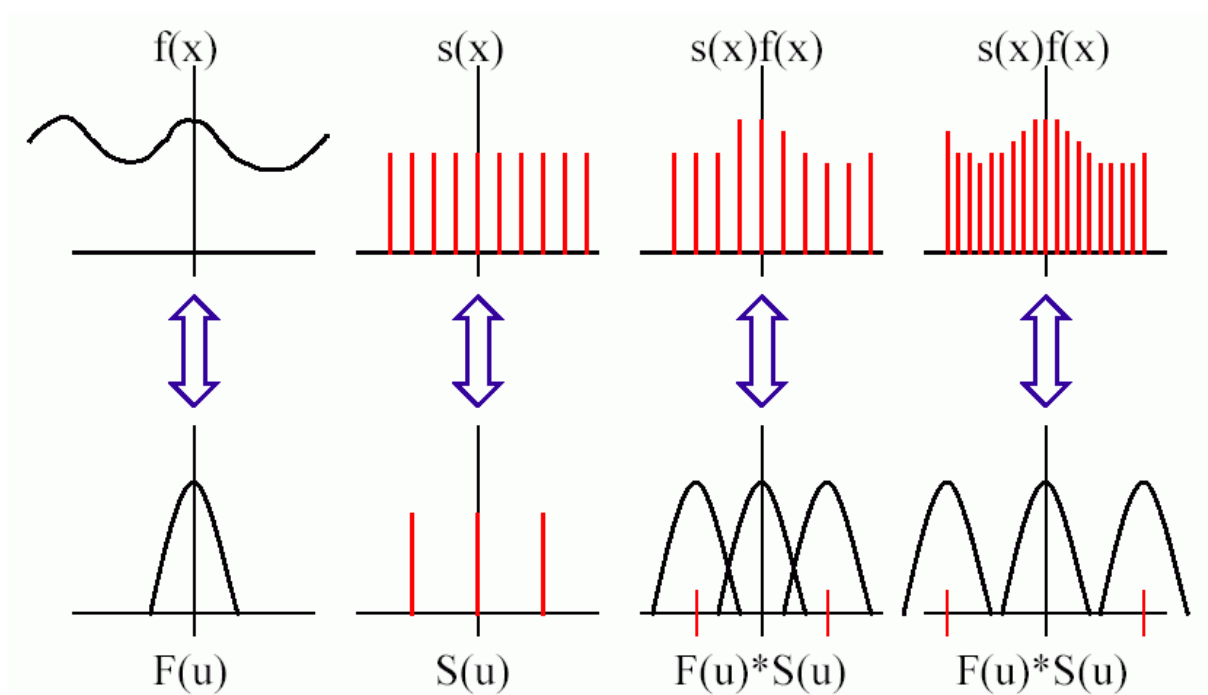
dem Produkt entspricht im Frequenzraum nach dem Dualitätssatz eine *Faltung mit dem reziproken Gitter*, was im Ergebnis einer periodischen Wiederholung der transformierten Funktion  $F(u, v)$  (des "Bildspektrums") gleichkommt:

- Im Frequenzbereich: Summe von periodisch wiederholtem Bildspektrum  $F(u, v)$

$$F_s(u, v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(u - \frac{j}{\Delta x}, v - \frac{k}{\Delta y}\right)$$

- führt zu **Aliasing**, wenn die einzelnen Spektren  $F(u, v)$  überlappen

Beispiel (1-dimensional):





Aliasing kann verhindert werden, wenn die Ausgangsfunktion (das Ausgangsbild) ein *bandbegrenzt*es Spektrum hat (also hohe Frequenzen unterdrückt sind;  $F(u,v) = 0$  für  $|u| > U, |v| > V$  mit Schranken  $U, V$ ):

Dann kann man dafür sorgen, dass die Gitterabstände  $\Delta x, \Delta y$  klein genug sind, dass keine Überlappung der Spektren im Frequenzraum der mit dem reziproken Gitter gefalteten Funktion auftritt.

### *Abtast-Theorem von Shannon*

- Überlappung kann verhindert werden wenn:

$$\Delta x < \frac{1}{2U}, \quad \Delta y < \frac{1}{2V}$$

Das heißt:

*Das Abtastintervall sollte um mehr als den Faktor 2 kleiner sein als das kleinste interessierende Detail im Bild.*

$2U, 2V$  heißen *Nyquist-Frequenzen*.

### *Standardabtastung:*

eine Digitalisierung, bei der die Intensitäten gleichmäßig über die Fläche einer Rasterzelle gemittelt werden (z.B. bei einer idealen CCD-Kamera).

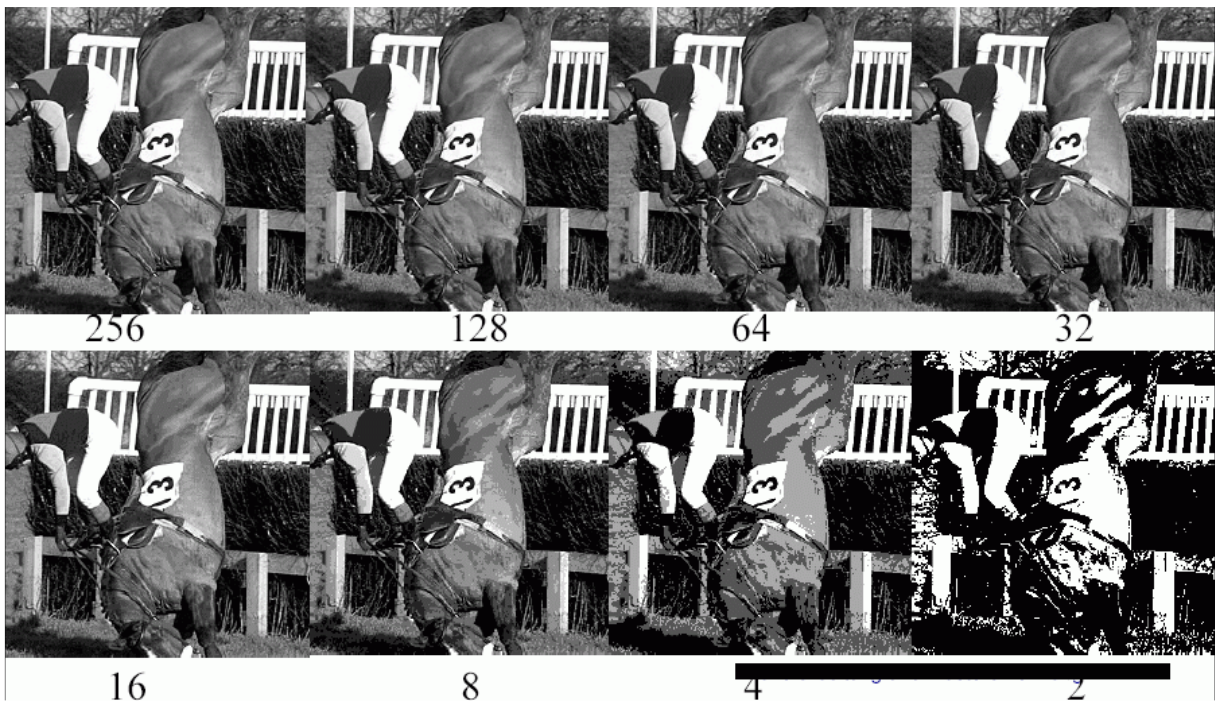
Achtung: Die Standardabtastung erfüllt *nicht* das Abtasttheorem!

⇒ die Standardabtastung führt i. allg. zu Moiré-Effekten (sichtbar z.B. bei Bearbeitung von gescannten Fotos).

Abhilfe: Filterfunktionen, die Bandbegrenzung sicherstellen.

## Quantisierung der Grauwerte (Intensitätswerte)

- Übergang zwischen **kontinuierlichem** Funktionswert und **digitalem** Wert
- Anzahl der Quantisierungsstufen sollte hoch genug sein, um feine Schattierungen erkennen zu können
- Üblicherweise Einteilung in  $k$  Intervalle:  $k = 2^b$  (b entspricht Anzahl der Bits, z.B. 1, 8, 24)
- Problem: **Falsche Konturen** erscheinen



Die Quantisierung der Grauwerte kann optimiert werden. Dazu die folgenden präzisen Definitionen:

Der Schritt, der nach der Diskretisierung folgt, ist die Quantisierung.

Es sei  $f(j,k)$  ein diskretes Zufallsfeld, dessen Werte kontinuierlich zwischen zwei Schranken liegen:  $f_{\text{MIN}} \leq f(j, k) \leq f_{\text{MAX}}$

$f_q(j,k)$ : quantisiertes Zufallsfeld, das  $K$  diskrete Werte  $q_1, \dots, q_k$  annehmen kann.

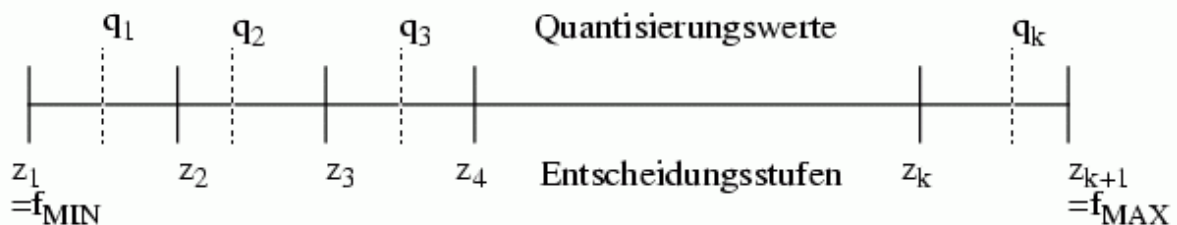
$f_q(j,k) \in \{q_1, \dots, q_k\}$  mit  $q_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, k$

Quantisierer:  $f(j,k) \longrightarrow f_q(j,k)$ .

Ein Quantisierer bildet eine kontinuierliche Funktion  $f$  in eine diskretwertige Funktion  $f_q$  ab. Er benutzt hierfür eine Menge von Entscheidungsstufen

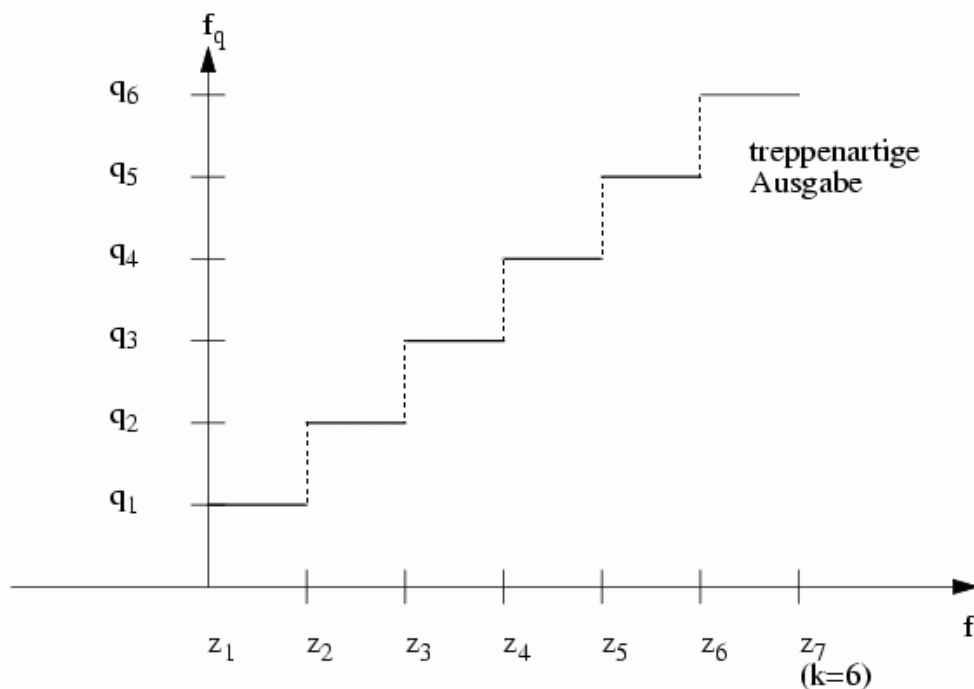
$\{z_1=f_{\text{MIN}}, \dots, z_{k+1}=f_{\text{MAX}}\}$  mit der folgenden Quantisierungsvorschrift:

Wenn  $f \in [z_i, z_{i+1}]$ , dann wird  $f=f_q=q_i$  gesetzt. Anschaulich:



$q_i$  liegt im allgemeinen nicht in der Mitte der Intervalle.

Sehr häufig wird auch die folgende Darstellung eines Quantisierers verwendet:



Quantisierer

## Optimale Quantisierung (Lloyd-Max-Quantisierung):

Gegeben:  $p_f(z)$  = Wahrscheinlichkeitsdichte des Zufallsfeldes  $f$

Gesucht: Entscheidungsstufen  $z_i$  ( $i=1, \dots, k+1$ ) und  $q_j$  ( $j=1, \dots, k$ )

Ansatz: Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers  $\langle e_q^2 \rangle$ :

$$e_q = z - z_q$$

$$\begin{aligned} \langle e_q^2 \rangle &= \overline{e_q^2} = E[(f - f_q)^2] = \int_{z_1}^{z_{k+1}} (z - z_q)^2 p_f(z) dz \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{z_j}^{z_{j+1}} (z - q_j)^2 p_f(z) dz \end{aligned}$$

**Minimaler Quantisierungsfehler:**

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial}{\partial z_j} \langle e_q^2 \rangle &= (z_j - q_{j-1})^2 p_f(z_j) - (z_j - q_j)^2 p_f(z_j) \\ &= 0, \text{ für } j = 2, 3, \dots, k \text{ (keine Differenzierung in den Endpunkten)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \langle e_q^2 \rangle = -2 \int_{z_j}^{z_{j+1}} (z - q_j) p_f(z) dz = 0, \text{ für } j = 1, \dots, k$$

$$\text{Aus (1) folgt: (1')} \quad z_j = \frac{q_j + q_{j+1}}{2}, \quad j = 2, 3, \dots, k$$

$$\text{Aus (2) folgt (2'): } q_j = \frac{\int_{z_j}^{z_{j+1}} z p_f(z) dz}{\int_{z_j}^{z_{j+1}} p_f(z) dz}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Interpretation: Entscheidungsstufen  $z_j$  liegen in der Mitte zwischen den beiden benachbarten Quantisierungswerten  $q_{j-1}$  und  $q_j$  und jedes  $q_j$  liegt im lokalen normierten Mittelwert der Verteilung  $p_f(z)$  in dem Intervall  $[z_j, z_{j+1}]$ .

Mathematisch: (1') und (2') stellen ein nichtlineares Gleichungssystem dar, das für alle  $j$  simultan gelöst werden muß, sofern  $z_1$  und  $z_{k+1}$  vorgegeben werden.

Für folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen wurde dieses Gleichungssystem gelöst:

$$\text{a) Gau\ss:} \quad p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

$$\text{b) Laplace:} \quad p(z) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|z-\mu|}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

$$\text{c) Rayleigh:} \quad p(z) = \frac{2z}{\sigma(2\sigma + \mu\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}}; \quad z \geq 0$$

$$\text{d) Lognormal:} \quad p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma z} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{\sigma^2}}; \quad z \geq 0$$

Bei den entsprechenden Berechnungen werden üblicherweise

$$\mu = 0, \quad \sigma = 1, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} = \sqrt{2}, \quad \text{und } z_1 = -\infty, \quad z_{k+1} = +\infty$$

angenommen.

## Spezialfall: Gleichförmige (lineare) Quantisierung

Gleichförmige Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$p_f(z) = \begin{cases} \left( \frac{1}{(z_{k+1} - z_1)} \right); & z_1 \leq z \leq z_{k+1} \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

(1') gilt unverändert:

$$z_j = \frac{q_j - q_{j-1}}{2}; \text{ für } j = 1, 2, \dots, k$$

$$(2') \quad q_j = \frac{\int_{z_j}^{z_{j+1}} z \, dz}{\int_{z_j}^{z_{j+1}} dz} = \frac{(z_{j+1}^2 - z_j^2)}{2(z_{j+1} - z_j)} = \frac{(z_{j+1} + z_j)}{2} \quad \text{mit } j = 2, 3, \dots, k$$

Die Quantisierungswerte  $q_j$  befinden sich jeweils in der Mitte der zwei benachbarten Entscheidungsstufen.

(1') und (2') sind jetzt lineare Gleichungen, daher auch der Name lineare Quantisierung.

Kombination von (1') und (2').

$$q_j = \frac{1}{2} \left[ \frac{q_j + q_{j-1}}{2} + \frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right] = \frac{1}{4} [2q_j + q_{j+1} + q_{j-1}]$$

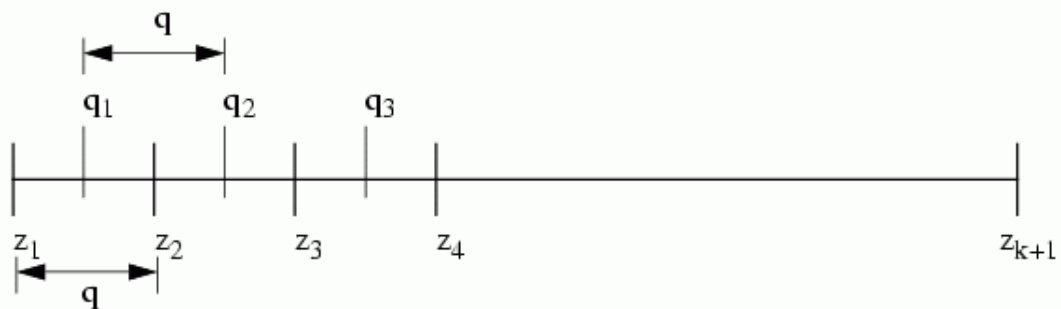
$$\frac{1}{2} q_j = \frac{1}{4} (q_{j+1} + q_{j-1})$$

$$q_j = \frac{q_{j+1} + q_{j-1}}{2}$$

Daraus folgt:  $q_j - q_{j-1} = q_{j+1} - q_j = \text{const} = q$  und

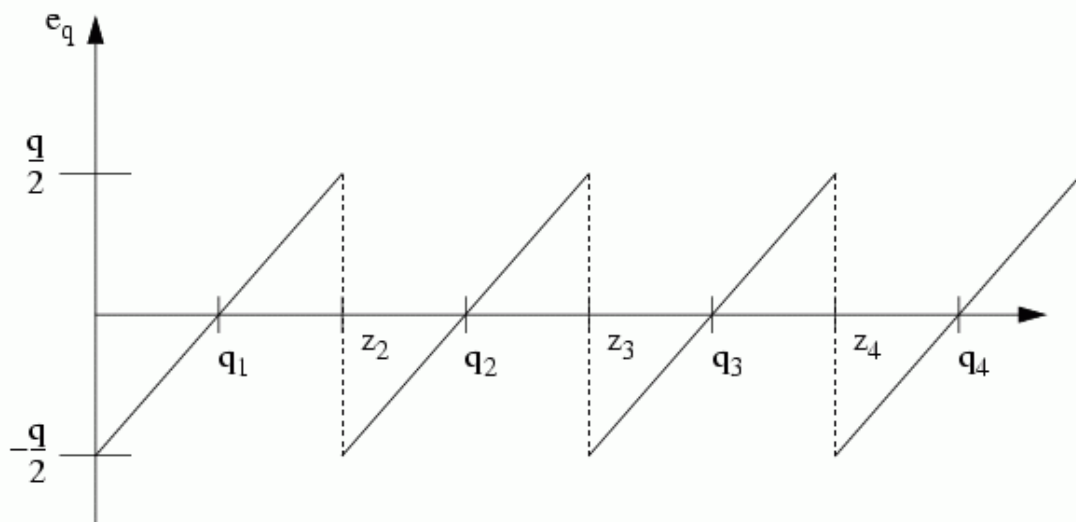
$$q_j = q_{j-1} + q, \quad z_j = q_j + q/2, \quad z_j - z_{j-1} = q_j - q_{j-1} = q$$

Die Entscheidungsstufen  $z_j$  und die Quantisierungswerte  $q_j$  sind mit demselben Abstand  $q$  äquidistant angeordnet.



**Quantisierungsfehler**  $e_q = z - z_q = z - q_j = z - j \frac{q}{2}$ ,  $z \in [z_j, z_{j+1}]$ ,  $j=1, \dots, k$  ist für alle Entscheidungsintervalle  $[z_i, z_{i+1}]$  gleich.

Sägezahnform: Der Fehler schwankt zwischen  $-q/2$  über 0 (bei  $q_j$ ) und  $+q/2$ .



(aus Levi 2002)